ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE

DEI LINCEI

ANNO CCCXIX.

1922

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXXI.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1922

5. Domandiamo, ora, in primo luogo, la condizione necessaria, espressa dal *Teorema A*, è forse equivalente a quella data dal Sommerfeld (loc. cit. nella Nota I)? Tale equivalenza si riscontra nel caso particolare che D si riduca ad un rettangolo o ad un cerchio e che in D sia $R_{12} \equiv 0$, $R_{11} \equiv R_{22} \equiv 1$, $A(x, y) \equiv k^2$, con k costante. Il rispondere ora, in tutta generalità, alla domanda posta, appare assai difficile. Occorrerebbe possedere — ciò che avrebbe, anche per di sè, un grandissimo interesse — più precise nozioni sulle linee di D, luogo, per i varî valori di λ, dei punti di zero delle soluzioni della (3).

Domandiamo, in secondo luogo, per un minimo debole dell'integrale $J(z)$ è sufficiente la condizione espressa dal *Teorema B* enunciato in principio della Nota I? È sufficiente, cioè, che la funzione intiera $\Delta(\lambda)$ si conservi sempre diversa da zero, in tutto l'intervallo $(0, 1)$? Per rispondere affermativamente basterebbe dimostrare che, soddisfatta questa condizione, se cioè $\Delta(\lambda) > 0$ per $0 \leq \lambda \leq 1$, l'equazione $L(u) + Au = 0$ possiede una soluzione sempre diversa da zero in tutto D. Di ciò mi propongo di trattare in una Nota futura.

Matematica. — *Sulle successioni di funzioni assolutamente continue, convergenti in media.* Nota di Carlo Severini, presentata dal Corrispondente O. Tedone.

Mi propongo d'indicare in questa Nota un criterio notevole per riconoscere la convergenza uniforme di una successione, convergente in media, i cui termini siano funzioni assolutamente continue, aventi derivate sommabili insieme coi loro quadrati. Il criterio ha particolare importanza per lo studio delle serie di funzioni ortogonali e normali, soddisfacenti alle condizioni ora dette.

1. Le funzioni:

$$f_n(x) \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots), \tag{1}$$

definite in un intervallo finito (a, b) $(a < b)$, siano ivi assolutamente continue, abbiano le derivate sommabili insieme coi loro quadrati, e costituiscano una successione convergente in media, rispetto ad una funzione caratteristica $p(x)$ misurabile, limitata, avente un limite inferiore l maggiore di zero, tale cioè da avere, essendo p un numero intero positivo qualsivoglia, indipendente da n:

$$\lim_{n=\infty} \int_a^b p(x) \Big[f_n(x) - f_{n+p}(x) \Big]^2 dx = 0. \tag{2}$$

Sussiste allora il seguente teorema, che contiene il criterio dianzi accennato.

La successione (1) *converge uniformemente nell'intervallo* (a, b) *ad una funzione limite continua* $f(x)$, *se*:

$$\lim_{n=\infty} \left\{ \int_a^b p(x) \left[f_n(x) - f_{n+p}(x) \right]^2 dx \, . \int_a^b \left[f'_n(x) - f'_{n+p}(x) \right]^2 dx \right\} = 0 \, ;$$

in particolare se risulta, qualunque siano n *e* p:

$$\int_a^b \left[f'_n(x) - f'_{n+p}(x) \right]^2 dx \leqq \mathrm{C} \qquad (\mathrm{C} \text{ costante}).$$

Essendo x' un punto qualunque di (a, b), si può infatti scrivere:

$$\left[f_n(x) - f_{n+p}(x) \right]^2 = \left[f_n(x') - f_{n+p}(x') \right]^2 +$$
$$+ 2 \int_{x'}^{x} \left[f_n(\xi) - f_{n+p}(\xi) \right] \left[f'_n(\xi) - f'_{n+p}(\xi) \right] d\xi \, ,$$

e quindi per la disuguaglianza di Schwarz:

$$\left[f_n(x) - f_{n+p}(x) \right]^2 \leqq \left[f_n(x') - f_{n+p}(x') \right]^2 +$$
$$+ 2 \sqrt{\int_{x'}^{x} \left[f_n(\xi) - f_{n+p}(\xi) \right]^2 d\xi \, . \int_{x'}^{x} \left[f'_n(\xi) - f'_{n+p}(\xi) \right]^2 d\xi} \, ,$$

ed a maggior ragione:

$$\left[f_n(x) - f_{n+p}(x) \right]^2 \leqq \left[f_n(x') - f_{n+p}(x') \right]^2 +$$
$$+ \frac{2}{\sqrt{l}} \sqrt{\int_a^b p(\xi) \left[f_n(\xi) - f_{n+p}(\xi) \right]^2 d\xi \int_a^b \left[f'_n(\xi) - f'_{n+p}(\xi) \right]^2 d\xi} \, .$$

Poichè è lecito supporre che sia x' un punto di minimo assoluto per la funzione $\left[f_n(x) - f_{n+p}(x) \right]^2$, risulta ancora:

$$\left[f_n(x) - f_{n+p}(x) \right]^2 \leqq \frac{1}{(b-a)\, l} \int_a^b p(\xi) \left[f_n(\xi) - f_{n+p}(\xi) \right]^2 d\xi +$$
$$+ \frac{2}{\sqrt{l}} \sqrt{\int_a^b p(\xi) \left[f_n(\xi) - f_{n+p}(\xi) \right]^2 d\xi \, . \int_a^b \left[f'_n(\xi) - f'_{n+p}(\xi) \right]^2 d\xi} \, .$$

Questa disuguaglianza sussiste, qualunque siano n, p ed x in (a, b), e serve senz'altro, a causa della (2), a provare che, nelle dette ipotesi, la (1) converge ivi uniformemente.

2. Si consideri ora una successione infinita di funzioni assolutamente continue, aventi derivate sommabili insieme coi loro quadrati nell'intervallo (a, b):

$$V_k(x) \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots),$$

le quali siano ortogonali e normali rispetto alla funzione caratteristica $p(x)$, tali cioè che si abbia:

$$\int_a^b p(x)\, V_h(x)\, V_k(x)\, dx = \begin{cases} 0 & \text{se } h \neq k \\ 1 & \text{se } h = k . \end{cases}$$

Si consideri inoltre una successione infinita di costanti reali:

$$A_k \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots),$$

soggette alla sola condizione, che converga la serie dei loro quadrati:

$$\sum_0^\infty{}_k A_k^2 .$$

Poichè la successione:

$$S_n(x) = \sum_0^n{}_k A_k V_k(x) \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{3}$$

risulta convergente in media, rispetto alla funzione caratteristica $p(x)$, essendo:

$$\int_a^b p(x) \left[S_n(x) - S_{n+p}(x) \right]^2 dx =$$

$$= \int_a^b p(x) \left[\sum_{n+1}^{n+p}{}_k A_k V_k(x) \right]^2 dx = \sum_{n+1}^{n+p}{}_k A_k^2 ,$$

può applicarsi alla (3) il precedente teorema, e se ne deduce senz'altro che *la serie*

$$\sum_0^\infty{}_k A_k V_k(x)$$

converge uniformemente nell'intervallo (a, b), *se*:

$$\lim_{n=\infty} \left\{ \left(\sum_{n+1}^{n+p}{}_k A_k^2 \right) . \int_a^b \left[\sum_{n+1}^{n+p}{}_k A_k V_k'(x) \right]^2 dx \right\} = 0 ;$$

in particolare se, qualunque siano n *e* p, *risulta*:

$$\int_a^b \left[\sum_{n+1}^{n+p}{}_k A_k V_k'(x) \right]^2 dx \leqq C \qquad \text{(C costante)} .$$

3. Vari problemi di fisica matematica si riducono alla determinazione, in un intervallo (a, b), di funzioni:

$$U_k(x) \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots),$$

soddisfacenti ad equazioni della forma:

$$U_k''(x) + [\lambda_k\, q(x) - r(x)]\, u_k(x) = 0 \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots), \tag{4}$$

ed a condizioni ai limiti, espresse da relazioni del tipo:

$$(5)\quad \begin{cases} a_1\, U_k(a) + a_2\, U'_k(a) + a_3\, U_k(b) + a_4\, U'_k(b) = 0 \\ b_1\, U_k(a) + b_2\, U'_k(a) + b_3\, U_k(b) + b_4\, U'_k(b) = 0 \end{cases} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots),$$

ove $q(x)$ ed $r(x)$ sono due funzioni note, continue, di cui la prima è anche maggiore di zero in ogni punto di (a, b); λ_k è un parametro indeterminato, ed

$$a_s\,,\ b_s \qquad (s = 1, 2, 3, 4)$$

sono costanti assegnate, per le quali si ha:

$$a_1\, b_2 - a_2\, b_1 = a_3\, b_4 - a_4\, b_3\,.$$

È noto (¹) che esistono infiniti valori reali del parametro λ_k (*numeri caratteristici*), per ciascuno dei quali l'equazione (4) ammette uno o più integrali, in numero finito, linearmente indipendenti (*funzioni fondamentali*), che soddisfano alle (5), e di cui due qualsivogliano, corrispondenti a numeri caratteristici diversi, sono fra loro ortogonali rispetto alla funzione caratteristica $q(x)$.

Mediante il metodo di ortogonalizzazione si può allora assegnare una successione di numeri caratteristici:

$$\Lambda_k \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots),$$

disposti per moduli non decrescenti, intendendosi ogni numero caratteristico ripetuto tante volte, quante sono le funzioni fondamentali, linearmente indipendenti ad esso relative, ed una corrispondente successione di tali funzioni:

$$(6)\qquad W_k(x) \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots),$$

ortogonali e normali rispetto alla stessa funzione caratteristica $q(x)$.

Poichè il sistema delle (6) risulta chiuso (²), il problema della rappresentazione di una funzione $f(x)$, sommabile insieme col suo quadrato in (a, b), mediante la serie:

$$(7)\qquad \sum_0^\infty{}_k\, B_k\, W_k(x), \qquad B_k = \int_a^b q(x)\, f(x)\, W_k(x)\, dx\,,$$

si riduce (³) alla ricerca delle condizioni, sotto le quali questa serie con-

(¹) Cfr. W. Stekloff: *Sur certaines questions d'Analyse, qui se rattachent à plusieurs problèmes de la Physique Mathématique* [Mémoires de l'Académie Impériale des Sciences de St. Pétersbourg, VIII série, classe physico-mathématique, vol. XXXI, n. 7 (1913)].

(²) Cfr. Stekloff, l. c. (1), Chap. II, n. 11.

(³) Cfr. C. Severini: *Sopra gli sviluppi in serie di funzioni ortogonali* [Atti dell'Accademia Gioenia di Catania, serie V, vol. III, (1910), Memoria XI].

verge ivi quasi dappertutto, fatta cioè al più eccezione per i punti di un insieme di misura nulla. In tale ricerca torna utile, come mi propongo di far vedere in un'altra Nota, il teorema del § 2. Per mezzo di questo teorema si arriva infatti a dimostrare che *la* (7) *converge uniformemente nell'intervallo* (a, b), se:

$$\lim_{n=\infty}\left[\left(\sum_{n+1}^{n+p}{}_k \mathrm{B}_k^2\right)\cdot\left(\sum_{n+1}^{n+p}{}_k \mathcal{A}_k \mathrm{B}_k^2\right)\right]=0;$$

in particolare se risulta, qualunque sia n:

$$\left|\sum_{0}^{n}{}_k \mathcal{A}_k \mathrm{B}_k^2\right| \leq \mathrm{C} \qquad (\mathrm{C}\ \text{costante}).$$

Relatività. — *Sopra i fenomeni che avvengono in vicinanza di una linea oraria.* Nota III di ENRICO FERMI, presentata dal Corrispondente G. ARMELLINI.

§ 4. Per mostrare l'applicazione dei risultati precedenti alla teoria della relatività, supporremo che V_n sia la V_4 spazio-tempo e che L sia una linea oraria, in vicinanza della quale ci proponiamo di studiare i fenomeni. Ponendo per brevità in (5) $ds_{\mathrm{M}} = ds$, si trova in questo caso:

$$ds^2 = (1 + \mathrm{C} \times \mathrm{M} - \mathrm{P})^2\, ds_{\mathrm{P}}^2 + d\overline{y}_1^2 + d\overline{y}_2^2 + d\overline{y}_3^2 .$$

Per evitare la comparsa di immaginarii e ristabilire l'omogeneità, conviene fare la seguente sostituzione di variabili:

$$s_{\mathrm{P}} = vt\,;\ \overline{y}_1 = ix\,;\ \overline{y}_2 = iy\,;\ \overline{y}_3 = iz\,,$$

essendo v una costante con le dimensioni di una velocità, per modo che t abbia le dimensioni di un tempo. Si ottiene, così,

$$ds^2 = a\,dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \tag{9}$$

dove

$$a = v^2(1 + \mathrm{C} \times \mathrm{M} - \mathrm{P})^2 . \tag{10}$$

Da ora in avanti, con gli ordinarî simboli del calcolo vettoriale intenderemo riferirci allo spazio x, y, z. Ed è in questo senso che si può intendere il prodotto scalare che figura in (10), purchè per C si intenda il vettore avente per componenti le componenti covarianti della curvatura geodetica della linea $x = y = z = 0$ e con M — P il vettore di componenti x, y, z. Chiameremo x, y, z coordinate di spazio e t tempo. Per uniformità scriveremo talvolta x_0, x_1, x_2, x_3 al posto di t, x, y, z e chiameremo anche g_{ik} i coefficienti della forma quadratica (9).