# ATTI

DELLA

# REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

ANNO CCCXIX.

1922

SERIE QUINTA

## RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXXI.

2° SEMESTRE.



ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1922

Il risultato del numero precedente, tenendo conto della (2), ci conduce al teorema:

*Il numero* M *delle classi di forme di Dirichlet, a determinante intero razionale* D, *duplicate, è sempre legato ai numeri* $m$ *ed* $m_1$ *delle classi di forme di Gauss duplicate, rispettivamente a determinante* D *e* — D, *dalle relazioni*:

$$M = 2^{r-1}\, m\, m_1 \quad \text{oppure} \quad M = 2^r\, m\, m_1\,,$$

*secondo che l'equazione indeterminata* $t^2 - Du^2 = -1$ *non ammette, oppure ammette, soluzioni intere razionali, escluso il caso* $D \equiv 0 \pmod{8}$ [1], *in cui si ha invece*:

$$M = 2^r\, m\, m_1\,;$$

*ove* $r$ *indica sempre il numero dei fattori primi, razionali, dispari, diversi di* D, *che sono* $\equiv 3 \pmod{4}$.

Si noti la simiglianza di questo teorema, con quello, dovuto a Dirichlet, sopra il numero totale delle classi di forme a coefficienti e variabili interi del corpo $K(\sqrt{-1})$, a determinante intero, razionale, che abbiamo considerato in principio del numero precedente.

## Matematica. — *Soluzione di qualche tipo di equazione differenziale ad indice qualunque.* Nota del prof. Pio Scatizzi S. J., presentata dal Socio T. Levi-Civita [2].

Il primo cenno di tali equazioni è stato dato da Eulero [3]; molto più diffusamente ne trattò Liouville [4], applicandole alla risoluzione di importanti problemi geometrici e fisico-matematici. Considereremo in questa Nota qualche tipo particolare, ma non privo d'interesse, che si può far dipendere dall'integrazione di equazioni differenziali ordinarie. Come è naturale, risguarderemo risoluta un'equazione funzionale che involge derivate d'ordine qualunque, quando riesca di ridurla ad ordinarie equazioni differenziali. Richiamerò anzitutto qui le formule recentemente date dalla signorina Angela Molinari [5] per la derivazione ad indice negativo e positivo, dovendomene

[1] In questo caso l'equazione suddetta non ha soluzioni intere razionali.

[2] Pervenuta all'Accademia il 1° luglio 1922.

[3] Eulero, *De progressionibus trascendentibus.*

[4] J. Liouville, *Sur quelques questions de Géométrie et de Mécanique et sur un nouveau genre de Calcul pour résoudre ces questions.* Journal de l'Ecole Polytechnique, XXI cahier.

[5] A. Molinari, *Derivazione ad indice qualunque.*

valere per la risoluzione esplicita delle equazioni suaccennate. Esse sono le seguenti:

[1] $$D^{-n}f(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{(x-\xi)^{n-1}}{\Gamma(n)}f(\xi)\,d\xi \quad ,$$

$$D^{n}f(x)=\frac{d^{N}}{dx^{N}}\int_{-\infty}^{x}\frac{(x-\xi)^{m-1}}{\Gamma(m)}f(\xi)\,d\xi$$

essendo $n=-m+N$, con N minimo intero non inferiore ad $n$. La $f(x)$ deve supporsi tale che risultino convergenti gli integrali dei secondi membri.

2. Primo tipo.

Sia l'equazione differenziale

[2] $$D^{n_0}y+\varphi(x)D^{n_1}y+\cdots+\chi(x)\,D^{n_\nu}y=R(x)\,,$$

nella qnale

$$\varphi(x)\;,\;\ldots\;,\;\chi(x)\;,\;R(x)$$

sono funzioni arbitrarie e le

$$n_s(s=0\,,1\,,2\,,\ldots,\nu)$$

sono altrettanti indici qualunque, soggetti però alla condizione

$$n_r-n_s=N_r \text{ intero } (r=0\,,1\,,2\,,\ldots,(s-1)\,,(s+1)\,,\ldots,\nu)\,.$$

Si vede subito che per mezzo della trasformazione

$$y=D^{-n_s}\psi$$

la [2] diviene un'equazione ad indici interi, il cui integral generale $F(x)$, sostituito in luogo di $\psi$, ci darà, ben s'intende, in quel campo funzionale in cui le operazioni sono legittime, l'integral generale della [2].

Ossia per [1]

$$y=\int_{-\infty}^{x}\frac{(x-\xi)^{n_s-1}}{\Gamma(n_s)}F(\xi)\,d\xi\,.$$

3. Secondo tipo.

[3] $$D^{N-\frac{1}{2}}y=ky+\varphi(x)\,,$$

dove $k$ rappresenta una costante, $\varphi(x)$ una funzione arbitraria. Se operiamo nella [3] la trasformazione

[5] $$y=u+\frac{1}{k}D^{N-\frac{1}{2}}u\,,$$

otterremo immediatamente l'equazione ad indice intero

$$D^{2N-1}u=k^2u+k\varphi(x)\,,$$

il cui integral generale supporremo, come sopra, espresso da $F(x)$. Basterà allora sostituirlo nella [5], in cui, ben s'intende, l'operazione $D^{N-\frac{1}{2}}u$ va esplicitata a norma delle [1] per ottenere la cercata risoluzione della [3].

4. Terzo tipo.

$$D^m y + kD^{m_1} y = \varphi(x) \tag{6}$$

dove $m$, $m_1$ sono qualunque. Anche questo tipo è facilmente integrabile per mezzo di una preliminare trasformazione qualora si verifichi la condizione

$$m - m_1 = N - \frac{1}{2}.$$

Infatti, con questo mezzo, la [6] viene a ridursi senz'altro al tipo [3].

## Meccanica. — *Sopra un erroneo calcolo numerico relativo alle figure ellissoidali d'equilibrio di masse fluide rotanti.* Nota di Tommaso Boggio, presentata dal Socio T. Levi-Civita [1].

È ben noto dalla Meccanica razionale che, in un sistema materiale isolato, il momento della quantità di moto, rispetto al baricentro del sistema, è un vettore costante [2]. Orbene, considerando il moto di rotazione d'insieme di una massa fluida, avente già una figura permanente, come l'ultimo stadio di una serie precedente di moti non rigidi della massa gassosa primitiva e supponendo trascurabile l'effetto degli attriti interni, nonchè quello delle azioni esterne, si può applicare la citata proprietà, e ritenere quindi costante, durante il moto della massa, il momento della quantità di moto di essa rispetto al suo baricentro.

Perciò tale quantità di moto si può riguardare, osserva Liouville [3], come il vero dato fisico del problema, a preferenza della velocità angolare di rotazione.

Supponendo data questa quantità di moto (invece della velocità angolare) e cercando quali sono le possibili forme di superficie d'equilibrio ellissoidali per la massa rotante, si trova, com'è ben noto, che esiste sempre uno ed un solo ellissoide di rotazione, mentre se l'ellissoide è a tre assi diseguali $2a$, $2b$, $2c$, bisogna che sia soddisfatta una certa condizione.

(1) Presentata nella seduta del 18 giugno 1922.

(2) Cfr. ad es. C. Burali-Forti e T. Boggio, *Meccanica razionale*, pag. 303 (Collezione Lattes, Torino, a. 1921).

(3) Liouville, *Sur les figures ellipsoïdales à trois axes inégaux, etc.* (Journal de Mathématiques, t. XVI, a. 1851).