ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

ANNO CCCXIX.

1922

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXXI.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1922

NOTE PRESENTATE DA SOCI

Analisi. — *Sulla integrazione di una serie di funzioni razionali.* Nota di Giuseppe Belardinelli, presentata dal Socio S. Pincherle [1].

In una Nota precedente ho studiato le serie della forma

$$(1) \qquad f(x) = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{c_n}{(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_n)}$$

nel caso che i punti $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n, \cdots$ siano su una circonferenza c con centro nell'origine e raggio uno e formino su questa un aggregato denso; ed ho dimostrato che, sotto certe condizioni a cui debbono soddisfare i coefficienti c_n, la circonferenza è una linea singolare essenziale per la (1), ed inoltre che essa converge assolutamente ed uniformemente sui raggi di convergenza di Borel oltrepassanti la detta circonferenza. In questa Nota mostro, analogamente a quanto ha fatto Gaston Julia [2] a proposito delle serie $\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{A_n}{x-\alpha_n}$, che, integrando lungo cammini convenienti, dalle serie (1) si ottengono funzioni monogene nel senso di Borel, multiformi non analitiche in cui l'insieme delle determinazioni in ciascun punto non è numerabile, in contrapposto al teorema di Poincaré-Volterra per le funzioni analitiche, il quale teorema dice che tutte le funzioni analitiche multiformi non possono avere, in ciascun punto del loro campo d'esistenza, che dei valori formanti un insieme numerabile.

Consideriamo una serie della forma (1) ove $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n, \cdots$ si trovino su una circonferenza c di centro nell'origine O e raggio uno, e formino su questa un aggregato denso.

Supponiamo che i coefficienti c_n siano determinati in dipendenza ai numeri u_n di cui alla Nota precedente, tali cioè che $\sum_{n=1}^{n=\infty} u_n$ sia convergente, ed inoltre che sia

$$(2) \qquad k \sum_{h=n+1}^{\infty} u_h < c_n < \frac{u_n}{M_1 M_2 \cdots M_n}$$

[1] Pervenuta all'Accademia il 28 settembre 1922.

[2] Julia, *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, t. 174 (6 février 1922), pag. 370.

ove $k > 2$ e $M_1, M_2, \cdots, M_n, \cdots$ rappresentano i valori assoluti delle funzioni $\dfrac{1}{1-\dfrac{x}{\alpha_v}}$ $(v = 1, 2, \cdots, n, \cdots)$ nelle aree A_v $(v = 1, 2, \cdots, n, \cdots)$ indicate nella Nota precedente.

La (1) nelle condizioni (2) convergerà assolutamente ed uniformemente sui raggi di convergenza di Borel, raggi oltrepassanti la circonferenza c.

Ora può vedersi facilmente come su questi raggi si hanno effettivamente delle funzioni monogene nel senso di Borel [1]; in quanto su questi raggi si hanno funzioni continue, essendo la (1) uniformemente convergente, ed a derivata unica ed anche continua, essendo la serie che si ottiene derivando termine a termine, nelle condizioni (2), uniformemente convergente su questi raggi.

Sia x un punto generico su un raggio uscente da 0, si ha, potendosi integrare termine a termine essendo la (1) uniformemente convergente sui raggi uscenti da 0,

$$F(x) = \int_0^x f(x)\,dx = \sum_{n=1}^{n=\infty} c_n \int_0^x \frac{dx}{(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_n)},$$

cioè

$$F(x) = \sum_{n=1}^{n=\infty} c_n \log (x-\alpha_1)^{a_1^{(n)}} (x-\alpha_2)^{a_2^{(n)}} \cdots (x-\alpha_n)^{a_n^{(n)}},$$

essendo

$$a_1^{(n)} = \frac{1}{(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_3)\cdots(\alpha_1-\alpha_n)},\ a_2^{(n)} = \frac{1}{(\alpha_2-\alpha_1)(\alpha_2-\alpha_3)\cdots(\alpha_2-\alpha_n)},\cdots$$

$$\cdots, a_n^{(n)} = \frac{1}{(\alpha_n-\alpha_1)(\alpha_n-\alpha_2)\cdots(\alpha_n-\alpha_{n-1})}$$

ed $F(x)$ sarà monogena, nel senso di Borel, ove lo è la $f(x)$.

Se prendiamo due cammini l_1, l_2 che attraversano la circonferenza c lungo dei raggi di c e che terminano ad un punto x esterno a questa circonferenza e partono dal suo centro, avremo:

$$(3) \qquad \int_{l_1} f(x)\,dx - \int_{l_2} f(x)\,dx = 2\pi i \sum_{n=1}^{n=\infty} (\Sigma \varrho_n),$$

essendo $\Sigma \varrho_n$ la somma dei residui, relativi ai poli inclusi dal contorno $l_1 l_2$, della frazione di posto ennesimo.

[1] Vedasi Borel, *Leçons sur les fonctions monogènes*, Gauthier-Villars, 1917, pag. 134.

Se consideriamo la serie dei residui delle singole frazioni relative ad un unico punto α_p, si ha, per quanto si è visto nella Nota precedente, che è convergente, onde potremo togliere la parentesi nel secondo membro della (3) e si avrà, se $\alpha_p, \alpha_t, \cdots, \alpha_s$, sono i poli interni al contorno $l_1\, l_2$, che

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} (\Sigma \varrho_n) = \varphi_p(\alpha_p) + \varphi_t(\alpha_t) + \cdots + \varphi_s(\alpha_s)\,,$$

essendo

$$\varphi_p(\alpha_p) = c_p + \frac{c_{p+1}}{\alpha_p - \alpha_{p+1}} + \frac{c_{p+2}}{(\alpha_p - \alpha_{p+1})(\alpha_p - \alpha_{p+2})} + \cdots$$

ed analogamente per le altre.

Ora, se $\sum_{n=1}^{n=\infty} (\Sigma \varrho_n)$ è, qualunque siano i cammini di integrazione, diversa da zero, il valore di due integrali, lungo questi cammini partenti dall'origine e terminanti in un punto x esterno alla circonferenza c, sarà sempre diverso e si avranno nel punto x tanti valori per quanti raggi distinti partenti dall'origine permettono di attraversare la circonferenza $|x| = 1$.

Ora, essendo per le (2)

$$|\varphi_p(\alpha_p) + \varphi_{p+1}(\alpha_{p+1}) + \cdots| \leq |\varphi_p(\alpha_p)| + |\varphi_{p+1}(\alpha_{p+1}) + \cdots <$$

$$< c_{p-1} + c_p + \cdots < \frac{c_{p-2}}{k} < \frac{k-1}{k} c_{p-1} < \varphi_{p-1}(\alpha_{p-1}),$$

perchè

$$\left| \frac{c_{p+1}}{\alpha_p - \alpha_{p+1}} + \frac{c_{p+2}}{(\alpha_p - \alpha_{p+1})(\alpha_p - \alpha_{p+2})} + \cdots \right| < \frac{1}{k} c_p$$

e

$$|\varphi_p(\alpha_p)| > \frac{k-1}{k} c_p\,, \qquad (p = 1, 2, \cdots, n, \cdots)$$

siamo sicuri che le (3) sono sempre diverse da zero qualunque siano i cammini di integrazione, cioè saranno diversi i valori della funzione integrale $F(x)$ per tutti i cammini distinti seguiti per andare al punto x fuori della circonferenza C.

L'integrazione delle serie (1), trattate nelle due Note, ci hanno dunque dato, mediante integrazione, funzioni monogene multiformi non analitiche aventi un insieme non numerabile di determinazioni in ogni punto x.