ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

ANNO CCCXIX.

1922

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXXI.

2° SEMESTRE.

BIBLIOTHECA LYNCEORUM

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1922

Geometria. — *Nuova trattazione della geometria proiettivo-differenziale delle curve piane.* Nota III di GUSTAVO SANNIA, presentata dal Socio ENRICO D'OVIDIO [1].

10. Il fascio di coniche aventi un contatto di 3° ordine con Γ in P è individuato dalla $Z^2 = 0$ (t contata due volte) e dalla $Y^2 - 2XZ = 0$, perchè dalle (28) si ha

$$(29)\quad \begin{cases} Y^2 - 2XZ = -l\sigma^4/2 + \sigma^5/5 + l^2\sigma^6/6 + (70ll_1 - 6l)\,\sigma^7/5\,!\,7 - \\ \qquad - (100ll_2 + 135l_1 + 252l^3 + 21)\,\sigma^8/7\,!\,2 + (56ll_3 - 43l_2 - \\ \qquad\qquad - 252l^2l_1 - 16l^2)\,\sigma^9/7\,!\,2 + R_{10}\,. \end{cases}$$

Da (28) e (29) segue, poi, che

$$(30)\quad Y^2 - 2XZ + 2lZ^2 = \sigma^5/10 - l\sigma^7/42 - (21 + 135l_1 + 352ll_2)\,\sigma^8/7\,!\,2 + \\ + (28l^2 - 43l_2)\,\sigma^9/7\,!\,2 + R_{10}\,,$$

e quindi che

$$(31)\qquad Y^2 + IZ^2 - 2XZ = 0$$

è la conica osculatrice (contatto di 4° ordine) *di* Γ *in* P.

11. Or consideriamo *il fascio di cubiche aventi contatto di 7° ordine con* Γ *in* P. Dalle (28) e (30) si ha

$$(32)\quad \begin{cases} \Omega_1(X, Y, Z) \equiv 5(Y^2 - 2XZ + 2lZ^2)\,Y - 4Z^3 \\ \qquad = -l\sigma^8/28 - (63 + 45l_1 + 1760ll_2)\sigma^9/7\,!\,2 + R_{10}\,. \\ \Omega_2(X, Y, Z) \equiv 5(Y^2 - 2XZ + 2lZ^2)\,(7X - 6lZ) - 14YZ^2 \\ \qquad = -(567 + 45l_1 + 1760ll_2)\,\sigma^8/6\,!\,2 + \\ \qquad + (240l^2 - 35l_2)\,\sigma^9/7\,!\,2 + R_{10}\,, \end{cases}$$

quindi

$$(33)\quad \begin{cases} \Omega_1(Y, Y, Z) \equiv 5(Y^2 + IZ^2 - 2XZ)\,Y - 4Z^3 = 0\,, \\ \Omega_2(X, Y, Z) \equiv 5(Y^2 + IZ^2 - 2XZ)\,(7X - 3IZ) - 14YZ^2 = 0 \end{cases}$$

sono due cubiche (basi) *del detto fascio*

$$(34)\qquad a\,\Omega_1(X, Y, Z) + b\,\Omega_2(X, Y, Z) = 0 \qquad (a, b \text{ cost.})\,.$$

[1] Presentata nella seduta del 2 giugno 1922.

Basta dare ad a e b valori il cui rapporto sia invariante per coll. (cioè, una funzione di σ, di I e delle derivate di I rispetto a σ) affinchè la cubica (34) risulti definita in modo invariante per collineazioni. E di alcune di queste possiamo dare definizioni geometriche.

12. Così: *per*

$$(35) \qquad a = 7\,(1134 + 45\,I_1 + 88\,II_2) \quad , \quad b = -2\,.\,6\,!\,I$$

la (34) *è la cubica osculatrice* (contatto di 8° ordine) *di* Γ *in* P, *che è surosculatrice se*

$$(36) \qquad 7(126 + 45\,I_1 + 880\,II_2)\,(1134 + 45\,I_1 + 88\,II_2) + \\ + 6\,!\,2\,I\,(120\,I^2 - 35\,I_2) = 0 \ (^{23}).$$

Se la (36) è soddisfatta in tutti i punti di Γ, questa coincide con la cubica osculatrice: quindi *le cubiche sono caratterizzate dall'identità* (36).

13. Importante è la cubica base $\Omega_1 = 0$, caratterizzata da ciò: *è la unica cubica del fascio che abbia un punto doppio in* P ([24]).

Dicesi (con Wilczynski) *cubica nodale penosculante* di Γ in P.

Perchè P *è un* n *per la cubica, le cui tangenti sono le rette* t *ed* n (n. 5) ([25]).

Con ciò risulta *geometricamente* definita la *normale proiettiva* n ([26]), quindi anche *il punto* T (0, 1, 0) *come polo di* n (Y = 0) *rispetto alla conica osculatrice* (31) e *il centro di curvatura* (n. 5), per la proprietà del n. 8; e quindi anche *il terzo lato* TN *del triangolo normale, come polare di* C ≡ (I, 0, 1), e quindi *il punto* N ≡ n . TN; sicchè *il triangolo* CTN *è autopolare*. Si ha poi che: *i tre punti di flesso* (uno reale, due immaginarii) *della cubica nodale penosculante giacciono sulla 2ª tangente* t' (la 1ª è t) *che dal punto* T *si può condurre alla conica osculatrice, ed hanno per coordinate*

$$(37) \qquad X = I \quad , \quad Y = 2\sqrt[3]{4:5} \ \text{(tre valori)} \quad , \quad Z = 2 \ (^{27}).$$

Infine: fra le cubiche del fascio (34), *la seconda cubica base* $\Omega_2 = 0$ *è caratterizzata dal suo passaggio per* T(0, 1, 0).

([23]) Perchè, moltiplicando le (32) per i valori (33) di a e b (ove $I = 2l$), si ha nel 2° membro uno sviluppo che incomincia col termine in σ^9, il cui coefficiente è il 1° membro di (36), a meno di un fattore numerico.

([24]) Perchè, come è facile verificare, la (34) e le equazioni che si ottengono uguagliando a zero le derivate parziali prime sono soddisfatte da $Y = Z = 0$ solo se $b = 0$.

([25]) Infatti $\partial^2 \Omega_1 / \partial Y \partial Z$ è l'unica derivata seconda di Ω_1 che non si annulli per $Y = Z = 0$.

([26]) E rimane giustificata l'osservazione ([17]).

([27]) Perchè la 1ª delle (33) è incontrata dalla sua Hessiana $5(3Y^2 + 2XY - IZ^2)\,Y - 12Z^3 = 0$, oltre che nel punto doppio $Y = Z = 0$, nei punti (37) ove è incontrata dalla retta t' di eq. $2X - IZ = 0$ che passa per T ed è tangente alla (31).

14. La conica (31), osculatrice per Γ, è tale anche per ciascuna cubica (34), con la quale ha 5 punti comuni in P: *il sesto punto comune* Q *ha le coordinate*

$$(38) \qquad X = 4a^2 + 49\,I\,b^2 \;,\quad Y = -28\,ab \;,\quad Z = 98\,b^2 .$$

Solo per $b = 0$, Q coincide ancora con P: dunque la cubica nodale penosculante Ω_1 può anche essere definita come *la sola cubica del fascio* (34) *per cui la conica osculatrice è surosculatrice.*

Solo per $a = 0$, $Q \neq P$ giace su n, ed allora è il punto $(I, 0, 2)$, che giace pure sulla (31); dunque Ω_2 può anche essere caratterizzata come *quella cubica* (34) *che incontra la conica osculatrice nei due punti d'incontro con la normale proiettiva.*

Le cubiche (34), per cui $a = \pm 7\sqrt{-I}$, $b = 2$, sono caratterizzate dal fatto che *incontrano la conica osculatrice in uno dei punti di contatto delle tangenti alla conica osculatrice condotte dal centro di curvatura* C ([28]).

La cubica (34), per cui $a = I^2$, $b = 226$, è caratterizzata dal fatto che *è tangente alla normale proiettiva* (come la nodale, ma) *in un punto diverso da* P.

15. Le cubiche del fascio (34), avendo 8 punti a comune (in P), ne hanno anche un nono (come è noto) H, detto *punto di Halphen*, che, come si vede risolvendo il sistema (35), ha per coordinate

$$(39) \quad X = 2^3 \cdot 7^2 + 3 \cdot 5^2\, I^2 \;,\quad Y = 2^2 \cdot 5 \cdot 7^3\, I \;,\quad Z = 5^2 \cdot 7 \,.\, I^2 \;([29]).$$

Coincide con P solo se in P la curvatura I è nulla, ed allora P dicesi (con Halphen) un *punto di coincidenza di* Γ.

16. *Le curve i cui punti son tutti punti di coincidenza* (considerate da Halphen) si presentano qui come *curve a curvatura* I *nulla.*

Esse sono la spirale logaritmica che taglia i suoi raggi vettori sotto un angolo di 30° e le curve collineari (Halphen) ([30]).

Più generalmente, le *curve anarmoniche* (di Halphen) si presentano qui come *a curvatura* I *costante.* Partendo dalla (22′), che diventa $\varphi''' + I\varphi' + \varphi = 0$, se ne trovano interessanti proprietà ([31]), fra cui *quella di ammettere un gruppo continuo di collineazioni in sè stesse.* Questa e l'altra $I =$ cost. non sono dunque proprietà dei cerchi (n. 8) (come accade nella geometria metrica).

([28]) Che sono *i punti ove detta conica è incontrata dalla* $TN(X = 0)$.

([29]) Ora si può definire il punto unità U (n. 9): come quello che fa acquistare al punto di Halphen le coordinate (39).

([30]) Lo si prova integrando la (22′) che qui diventa $\varphi''' + \varphi = 0$. Cfr. Wilczynski, loc. cit. ([2]), cap. III, § 5, ove si trovano altre proprietà di queste curve.

([31]) Per le quali rinvio a loc. cit. ([2]), cap. III, § 8.