ATTI
DELLA
REALE ACCADEMIA NAZIONALE
DEI LINCEI

ANNO CCCXIX.
1922

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXXI.
2° SEMESTRE.

ROMA
TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1922

Matematica. — *Sugli spazi curvi.* Nota (*) di C. BURALI-FORTI, presentata dal Socio R. MARCOLONGO [1].

Le (14), (15) si comportano in modo assai diverso. La prima (14) dà λ'_2 in funzione di σ e λ_2, ma sotto forma che, in sostanza, è una identità, poichè il $d\sigma/dP$ si esprime mediante σ, λ_2, λ'_2 [2]. Invece la prima (15) dà una funzione di λ'_3 mediante σ e λ_3 senza che vi comparisca $d\sigma/dP$. Differenze che si ritroverebbero volendo esprimere $\lambda'_4, \ldots$ in funzione di $\lambda_4, \ldots$; argomento che non intendiamo trattare [3].

4. Essendo ξ, η, ζ delle *omografie* e $u \geqq 2$, introduciamo il simbolo $\Phi_{\xi,\eta,\zeta}$, operatore tra $\mathbf{H}_u$ e $\mathbf{H}_u$, ponendo [cfr. nota (2) pag. 76]

$$\Phi_{\xi,\eta,\zeta}\, \mu_u = \mathcal{H}' \,\}\, \xi\, \mu_u\, \eta\, ,\, \zeta^{(u-1)} \,\{ \tag{16}$$

e, per abbreviare, per la particolare e nota σ,

$$\Phi_* = \Phi_{K\sigma,\sigma,\sigma} \quad , \quad \Phi^* = \Phi_{\sigma^{-1}, K\sigma^{-1}, K\sigma^{-1}} \,. \tag{16'}$$

(*) V. questi Rendiconti, pag. 73.

(1) Pervenuta all'Accademia il 23 giugno 1922.

(2) Si può esprimere [cfr. (a), p. 59, (4); (d), p. 54, (12); (e), p. 286] λ_2 mediante α soltanto (e, analogamente, λ_2 mediante α')

$$2\lambda_2 = \alpha^{-1} . (1 + k - k')\, (d\alpha/dP)$$

e quindi, per mezzo della (5), anche $\lambda_3, \ldots$ in funzione di α e delle sue derivate; la forma è complessa e quindi poco utile.

(3) Ne diamo un cenno. Essendo $d_r, d_s, \ldots d_t$ una successione di differenziali, indichiamo con $\Omega(\alpha, d_rP, d_sP, \ldots, d_tP)$, o, brevemente, $\Omega_{rs\ldots t}$ delle *omografie* che pes essere β invertibile, possiamo definire ponendo:

$$\begin{aligned}
&\beta\Omega_1 = d_1\beta \\
&\beta\Omega_{12} = -\, d_1(\beta\Omega_2) + d_2\,(\beta\Omega_1) \\
&\beta\Omega_{123} = d_1(\beta\Omega_{23}) + d_2(\beta\Omega_{31}) + d_3(\beta\Omega_{12}) \\
&\beta\Omega_{1234} = -\, d_1(\beta\Omega_{234}) + d_2(\beta\Omega_{341}) - d_3(\beta\Omega_{412}) + d_4(\beta\Omega_{123}) \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

È facile esprimere le Ω con $3, 4, \ldots$ indici, mediante le Ω con un solo indice e $2, 3, \ldots$ differenziali; come pure esprimere le Ω con $2, 3, \ldots$ indici, mediante β e altrettanti differenziali. Le Ω ad $1, 2$ indici comprendono alle $\Phi . \Theta$ di Boggio e dànno, quindi, i simboli di Christoffel e di Riemann a $3, 4$ indici. Le Ω a $3, 4, \ldots$ indici, che sono ancora da studiare, daranno simboli (molto complessi) analoghi ai precedenti con $5, 6, \ldots$ indici.

Si ha, per la $\mathbf{H}_3$ di Riemann,

$$\Phi_* \{(\mathrm{k}^\star - 1)\, \alpha\lambda_3\} = (\mathrm{k}^\star - 1)\, \alpha'\lambda'_3 \tag{17}$$

la quale esprime, in sostanza, che: *i simboli* (**ab** , **cd**) *a quattro indici formano un sistema covariante* [1].

Infatti. Per formule note [cfr. anche nota [1] pag. 75] si ha:

$$\Phi_* \{\alpha \,.\, (\mathrm{k}^\star - 1)\, \lambda_3\} = \mathcal{H}' \{\mathrm{K}\sigma \,.\, \alpha \,.\, (\mathrm{k}^\star - 1)\, \lambda_3 \,.\, \sigma \,,\, \sigma^{(2)}\} =$$
$$= \mathcal{H}' \{\alpha'\sigma^{-1} \,.\, (\mathrm{k}^\star - 1)\, \lambda_3 \; \sigma \,,\, \sigma^{(2)}\} = \alpha' \,.\, \sigma^{-1} \,.\, \mathcal{H}' \{(\mathrm{k}^\star - 1)\, \lambda_3 \,,\, \sigma^{(2)}\} \,.\, \sigma$$

che per la (15), e la nota [1] pag. 75, dimostra la (17).

5. Ed ora indichiamo brevemente come si possa risolvere una questione che presenta attualmente un grande interesse. Si ritiene, generalmente, che i metodi *assoluti* (senza coordinate) del calcolo *vettoriale-omografico* non bastino per trattare la geometria dell'S_n curvo, e sia necessario ricorrere al *calcolo differenziale assoluto con coordinate generali*. Vedremo ora facilmente che ciò *non* si verifica.

Se μ_u è una $\mathbf{H}_u$, allora i numeri

$$\mathbf{a}_1 \times \mu_u \mathbf{a}_2 \ldots \mathbf{a}_{u+1} \,, \tag{18}$$

variando **a** tra i vettori dell'S_n, sono in numero infinito. Ma scegliendo, comunque, i vettori **a** in un sistema unitario ortogonale dell'S_n, allora i numeri (18) sono in numero di n^{u+1} [e i (18) generali si esprimono linearmente mediante questi n^{u+1}] e costituiscono, precisamente, un ordinario *sistema di ordine* $u + 1$, naturalmente *relativo* al fissato sistema di vettori coordinati. Viceversa un tale sistema dipende da una $\mathbf{H}_u$ e dal sistema coordinato. Si è così data definizione *assoluta* dei sistemi di ordine $u + 1$.

Il sistema di ordine $u + 1$ individuato da μ_u è, secondo il comune significato, *covariante* o *controvariante*, quando, essendo μ'_u la trasformata di μ_a, passando da P a P′, si ha

$$\mu'_u = \Phi_* \, \mu_u \,, \quad \text{ovvero} \quad \mu'_u = \Phi^\star \, \mu_u \,;$$

segue che anche la covarianza e controvarianza acquista forma assoluta, *dipendentemente* dal passaggio di P a P′.

[1] Vedremo tra poco che Φ_*, Φ^* dànno l'ordinaria *covarianza* e *controvarianza*.

Consideriamo ora due operatori binari Π_p, Π'_p che definiamo ponendo

$$(19)\quad \begin{cases} \Pi_p(\mu_u\,,\mu_v)\,\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_{u-p}\,\mathbf{y}_1 \ldots \mathbf{y}_{v-p} = \\ \Sigma_i\, \mathrm{H}(\mu_u\,\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_{u-p}\,\mathbf{i}_1 \ldots \mathbf{i}_p\,,\mu_v\,\mathbf{y}_1 \ldots \mathbf{y}_{v-p}\,\mathbf{i}_1 \ldots \mathbf{i}_p) \\ \text{per}: p \geqq 0\,, u > 0\,, v > 0\,, p \leqq u\,, p \leqq v \end{cases}$$

$$(20)\quad \begin{cases} \Pi'_p(\mu_u\,,\mu_v)\,\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_{u-p}\,\mathbf{y}_1 \ldots \mathbf{y}_{v+1-p} = \\ \Sigma_i\, \mu_u\,\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_{u-p}\,\mathbf{i}_1 \ldots \mathbf{i}_p\,.\,\mathbf{i}_1 \times \mu_v\,\mathbf{y}_1 \ldots \mathbf{y}_{v+1-p}\,\mathbf{i}_2 \ldots \mathbf{i}_p \\ \text{per}: p > 0\,, u > 0\,, v > 0\,, p < u\,, p < v \end{cases}$$

essendo $\mathbf{x}\,,\mathbf{y}$ vettori arbitrari e $\mathbf{i}$ vettori di un arbitrario sistema unitario-ortogonale, e *arbitrario* poichè si ha facilmente [insieme ad altre notevoli proprietà che dànno le (21), (22)] che $\Pi_p(\mu_u\,,\mu_v)\,,\Pi'_p(\mu_u\,,\mu_v)$ risultano *indipendenti* dal sistema $\mathbf{i}$ [e sono, del resto, ed ovviamente, indipendenti da $\mathbf{x}\,,\mathbf{y}$].

È facile vedere che le $\Pi_p(\mu_u\,,\mu_v)$, $\Pi'_p(\mu_u\,,\mu_v)$ che sono entrambe delle $\mathbf{H}_{u+v+1-2p}$, individuano il sistema di ordine $u + v + 2 - 2p$ che, con i metodi ordinari, si ottiene *moltiplicando* o *componendo* i due sistemi individuati da μ_u e μ_v [1].

In modo assai semplice si dimostra che:

$$(21)\ \Phi_{\xi,\eta,\zeta}\,\Pi_p(\mu_u\,,\mu_v) = \Pi_p\{\mathcal{H}'(\mathrm{K}\zeta\,.\,\mu_u\eta\,.\,\zeta^{(v-p-1)}\,,1^{(p)})\,,\mathcal{H}'(\xi\mu_v\zeta\,.\,\zeta^{(v-p-1)}\,,1^{(p)})\}$$

$$(22)\ \Phi_{\xi,\eta,\zeta}\,\Pi_p(\mu_u\ \mu_v) = \Pi'_p\{\Phi_{\xi,\eta,\zeta}\mu_u\,,\mathcal{H}'(\zeta^{-1}\,\mu_v\zeta\,.\,\zeta^{(v-p)}\,,\mathrm{K}\zeta^{-1(p-1)})\}$$

le quali dànno come casi particolari le formule

$$(23)\ \Phi_\star\,\Pi_0(\mu_u\,,\mu_v) = \Pi_0\{\Phi_\star\,\mu_u\,,\Phi_\star\,\mu_v\}\ \text{e analoga per}\ \Phi^\star\,,$$

$$(24)\ \Phi_\star\,\Pi'_p(\mu_u\,,\mu_{p-1}) = \Pi'_p\{\Phi_\star\,\mu_u\,,\Phi^\star\,\mu_{p-1}\}\ \text{e analoga con scambio di}\ \Phi^\star\ \text{e}\ \Phi_\star$$

che esprimono note leggi di *covarianza, controvarianza, saturazione degli indici*. Si noti che, contrariamente a quanto si fa con i metodi ordinarî, non si deve constatare a *priori* la covarianza e la controvarianza.

[1] È la Π_0 che corrisponde alla *moltiplicazione* ordinaria. Per la Π_p, con $p > 0$, si ha una nuova *legge di saturazione degli indici*. Si noti che $\Pi'_p(\mu_{u+p}\,,\mu_{v+p})$ è una $\mathbf{H}_{u+v+1}$ e poichè $u + v + 1$ *non* è funzione di $u + p$ e $v + p$ l'indice p a Π è *necessario*. Si può esprimere la Π'_p in funzione di Π_p, e viceversa: $\Pi'_p(\mu_u\,,\mu_v) = \mathrm{K}\Pi_p(\mu_u\,,\mu'_v)$ con μ'_v funzione di μ_v; ma la forma è molto complessa e quindi inutile.

Dalla formula già citata [cfr. (^{b}), p. 171, (5)] che dà il $d\sigma$, si ottengono le *derivate covarianti* e *controvarianti* per sistemi *qualunque*. La forma è complessa, ma meno dell'ordinaria. Non trasformando P in P′ queste derivate non si presentano.

Ciò che precede di questo n. 5 ha l'unico scopo di collegare i procedimenti senza coordinate a quelli, ordinarî, con coordinate. È probabile che nel campo assoluto non si abbia bisogno di considerare Π_p e Π'_p.

Matematica. — *Sull'integrazione per parti tra limiti infiniti.* Nota del prof. O. Nicoletti, presentata dal Socio L. Bianchi [1].

1. Siano $\varphi(x)$, $f(x)$ due funzioni della variabile reale x, definite per $x \geq a$, per le quali in *ogni* intervallo (ab) (con $b > a$) valga la formula d'integrazione per parti:

$$\text{(A)} \qquad \int_a^b \varphi(x) f'(x)\, dx = \Big\{ f(x)\, \varphi(x) \Big\}_a^b - \int_a^b \varphi'(x) f(x)\, dx \,.$$

Facciamo in questa tendere b a $+\infty$; è noto che, ove due termini tendano a limiti determinati e finiti, anche il terzo tende ad un limite determinato e finito, e si ha la formula d'integrazione per parti tra limiti infiniti, che con notazioni evidenti scriviamo:

$$\text{(B)} \qquad \int_a^\infty \varphi(x) f'(x)\, dx = \Big\{ f(x)\, \varphi(x) \Big\}_a^\infty - \int_a^\infty \varphi'(x) f(x)\, dx \,.$$

Quando invece nella (A) si sappia che *uno solo* dei tre termini tende, per $b \to +\infty$, ad un limite determinato e finito, non si può, senz'altro, trarre da essa alcuna conclusione; è quindi interessante lo studio di alcuni casi, nei quali, ponendo la condizione che uno solo dei termini della (A) tenda per $b \to +\infty$ ad un limite determinato e finito, e imponendo alle funzioni $f(x)$, $\varphi(x)$ altre semplici condizioni, si può affermare che anche un altro termine della (A) tende, per $b \to +\infty$, ad un limite determinato e finito, e quindi vale la formula (B).

2. Siano perciò $f(x)$, $\varphi(x)$ due funzioni, per le quali:

1) in ogni intervallo (ab), con $b > a$, valga la formula (A);
2) per $x \geq a$ sia $\varphi(x) \geq 0$, $\varphi'(x) \leq 0$ (oppure $\varphi(x) \leq 0$, $\varphi'(x) \geq 0$);
3) l'integrale $\int_a^\infty \varphi(x) f'(x)\, dx$ sia determinato e finito.

[1] Pervenuta all'Accademia il 2 agosto 1922.