ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

ANNO CCCXIX.

1922

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXXI.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1922

Meccanica. — *Le equazioni differenziali del moto dei fluidi applicate al campo di velocità prodotto dall'elica.* Nota dell'ing. dott. E. Pistolesi, presentata dal Socio T. Levi-Civita [1].

Lo studio del moto di un fluido è assai semplificato quando si abbia a che fare col moto permanente. Ora tale esso non è nel caso dell'elica, giacchè le forze applicate in corrispondenza della superficie delle pale dell'elica ruotano con essa.

Per avere un moto permanente, occorre riferirsi, nel caso dell'elica, ad assi rigidamente connessi con l'elica e quindi ruotanti insieme ad essa [2].

Se indichiamo ora con $\mathbf{V}$ il vettore velocità nel moto assoluto (riferito, cioè, ad assi fissi) con $\mathbf{V}'$ il vettore velocità nel moto relativo (riferito, cioè ad assi ruotanti) con $\mathbf{F}$ il vettore forza unitaria di massa agente in un punto del campo, con p la pressione, con μ la densità del fluido, si ha (equazione di Eulero):

$$(1) \qquad \frac{d\mathbf{V}}{dt} = \mathbf{F} - \frac{1}{\mu} \operatorname{grad} p \,.$$

Ma $\dfrac{d\mathbf{V}}{dt}$ non è che l'accelerazione $\mathbf{A}$ del moto assoluto, la quale soddisfa alla ben nota relazione

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_r + \mathbf{A}_\tau + 2\,\Omega \wedge \mathbf{V}'$$

dove $\mathbf{A}_r$ indica l'accelerazione del moto relativo, $\mathbf{A}_\tau$ l'accelerazione del moto di trascinamento, Ω il vettore velocità angolare del sistema di riferimento. Da cui, poichè:

$$\mathbf{A}_r = \frac{d\mathbf{V}'}{dt}$$

(la derivazione rispetto a t intendendosi qui fatta con referenza agli assi solidali con l'elica), segue:

$$\frac{d\mathbf{V}'}{dt} = \mathbf{F} - \mathbf{A}_\tau - 2\,\Omega \wedge \mathbf{V}' - \frac{1}{\mu} \operatorname{grad} p \,.$$

[1] Pervenuta all'Accademia il 27 giugno 1922.

[2] Si suppone che il centro dell'elica sia immobile e che l'elica sia investita dalla corrente. Questo caso si deduce da quello dell'elica avanzante nel fluido immobile aggiungendo una semplice traslazione uniforme, la quale non cambia le equazioni differenziali del moto.

Nel caso che consideriamo, in cui il moto del sistema di riferimento è rotatorio uniforme (e quindi $\Omega =$ costante):

$$A_\tau = -\frac{1}{2}\,\Omega^2 \operatorname{grad} r^2$$

essendo r la distanza del punto considerato dall'asse di rotazione. Perciò:

$$\frac{d\mathbf{V}'}{dt} = \mathbf{F} - 2\,\Omega \wedge \mathbf{V}' + \frac{1}{2}\,\Omega^2 \operatorname{grad} r^2 - \frac{1}{\mu} \operatorname{grad} p\,.$$

Questa è, in generale, l'equazione del fluido riferita agli assi ruotanti. Se, come suol farsi, si suppone μ funzione della sola p, può porsi:

$$\frac{1}{\mu} \operatorname{grad} p = \operatorname{grad} P$$

e quindi

$$\frac{d\mathbf{V}'}{dt} = \mathbf{F} - 2\,\Omega \wedge \mathbf{V}' - \operatorname{grad}\left(P - \frac{1}{2}\,\Omega^2 r^2\right) \tag{2}$$

Generalmente, nelle applicazioni aeronautiche, si suol porre $\mu =$ cost. e quindi può scriversi:

$$\frac{d\mathbf{V}'}{dt} = \mathbf{F} - 2\,\Omega \wedge \mathbf{V}' - \operatorname{grad}\left(\frac{p}{\mu} - \frac{1}{2}\,\Omega^2 r^2\right). \tag{2'}$$

Dalla (2) può ricavarsi l'equazione di Bernouilli per il moto riferito agli assi ruotanti, quando esso è permanente: basta moltiplicare scalarmente i due membri per $\mathbf{V}'\,dt = d'\mathrm{P}$, elemento di traiettoria nel moto relativo. Indicando con T′ l'energia cinetica riferita all'unità di massa nel moto relativo:

$$T' = \frac{1}{2}\,V'^2$$

e ammettendo che le forze $\mathbf{F}$ abbiano un potenziale U, si avrà:

$$dT' = d\left(U - P + \frac{1}{2}\,\Omega^2 r^2\right)$$

risultando nullo il prodotto scalare di $2\,\Omega \wedge \mathbf{V}'$ per $\mathbf{V}'\,dt$. Segue che, lungo tutta una linea di corrente,

$$T' - U + P - \frac{1}{2}\,\Omega^2 r^2 = \text{cost}\,. \tag{3}$$

Se le forze $\mathbf{F}$ sono nulle in tutti i punti del campo, o se la loro direzione è ovunque normale alle linee di corrente, in guisa che il prodotto scalare $\mathbf{F} \times \mathbf{V}\,dt$ sia ovunque nullo, si ha più semplicemente

$$T' + P - \frac{1}{2}\,\Omega^2 r^2 = \text{cost}\,. \tag{4}$$

formula che nell'ipotesi $\mu =$ cost diviene:

$$p + \frac{1}{2} \mu V'^2 - \frac{1}{2} \mu \Omega^2 r^2 = \text{cost}\,. \tag{4'}$$

Se si suppone che tutte le linee di corrente siano tracciate su cilindri coassiali aventi per asse comune l'asse di rotazione dell'elica, $\Omega^2 r^2$ diviene, per ogni linea di corrente, una costante e la (4') si semplifica nella seguente:

$$p + \frac{1}{2} \mu V'^2 = \text{cost}\,. \tag{5}$$

La costante che compare nel secondo membro della (4) varia generalmente da una ad un'altra linea di corrente; ma se la corrente riferita agli assi fissi, è, all'infinito, traslatoria con velocità V_0 uniforme e la pressione è ivi anch'essa uniforme e eguale a p_0, si vede facilmente che la costante è la stessa per tutte le linee di corrente ed è eguale a $p_0 + \frac{1}{2} a V_0^2$. La (4') è valida, non soltanto lungo una linea di corrente, ma in tutto il campo e assume la forma:

$$p + \frac{1}{2} \mu V'^2 - \frac{1}{2} \mu \Omega^2 r^2 = p_0 + \frac{1}{2} a V_0^2\,. \tag{6}$$

In tal caso può introdursi la velocità del moto assoluto, della quale indicheremo con $V_0 + v$ la componente assiale, con $u = r\omega$ la componente tangenziale, con w la componente radiale.

Fatta la sostituzione, si trova:

$$p + \mu v \left(V_0 + \frac{v}{2}\right) - \mu r^2 \omega \left(\Omega - \frac{\omega}{2}\right) + \frac{1}{2} \mu w^2 = p_0 \tag{7}$$

formula di notevole importanza per le applicazioni.

Osserviamo infine che in base alla (6) la pressione p si può scindere in due parti:

$$p_1 = \frac{1}{2} a \Omega^2 r^2\,,$$

e

$$p_2 = p - p_1$$

tale che

$$p_2 + \frac{1}{2} \mu V'^2 = \text{cost}\,.$$

La p_1 è l'effetto di un campo di forze costante

$$F_1 = \text{grad} \frac{1}{2} \Omega^2 r^2 = \Omega^2 \mathbf{r}$$

(campo centrifugo); la sua azione sulla pala di un'elica è una forza opposta alla forza centrifuga della massa di fluido che sarebbe contenuta nel posto occupato dalla pala [1].

Astraendo da questa specie di azione fluido-statica che non ha grande importanza nello studio dell'elica, restano le azioni fluido dinamiche dovute alla parte p_2 della pressione.

Posto

$$\mathbf{F}_2 = \mathbf{F} - \mathbf{F}_1$$

la (2) assume la forma seguente:

$$\frac{d\mathbf{V}'}{dt} = \mathbf{F}_2 - 2\,\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{V}' - \frac{1}{\mu}\,\mathrm{grad}\,p_2\,. \tag{9}$$

Partendo da questa equazione si può estendere al caso in esame il teorema di Kutta-Joukowski nella sua forma elementare, usando un procedimento analogo a quello usato da Prandtl [2] nel caso dell'ordinario moto permanente.

Tale procedimento consiste nel considerare, come sede delle spinte elementari che si esercitano alla superficie di un corpo immerso in un fluido in moto, uno straterello vorticoso infinitesimo circondante il corpo (*vortici aderenti*).

Con tale artifizio le pressioni superficiali si trasformano in forze distribuite nel volume infinitesimo occupato dallo stato vorticoso, le quali, come equivalenti delle pressioni superficiali, sono normali alle linee di corrente lambenti il corpo. Questa proprietà di dette forze fa sì che, nonostante la loro presenza, valga, come si è visto nella discussione della formula (3), il teorema di Bernouilli per la pressione p_2, ossia

$$p_2 + \frac{1}{2}\,\mu\,\mathrm{V}'^2 = \mathrm{cost}\,.$$

Ciò premesso, poichè il moto riferito agli assi ruotanti è permanente, si ha:

$$\frac{d\mathbf{V}'}{dt} = \frac{d\mathbf{V}'}{d\mathrm{P}}\,\mathbf{V}' = \mathrm{grad}\,\frac{\mathrm{V}'^2}{2} + \mathrm{rot}\,\mathbf{V}' \wedge \mathbf{V}'$$

e quindi, dalla (9), posto $\mathbf{k} = \mu\,\mathbf{F}_2$ (forza unitaria di volume):

$$\mathbf{k} = 2\,\mu\,\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{V}' + \mu\,\mathrm{rot}\,\mathbf{V}' \wedge \mathbf{V}' + \mathrm{grad}\left(p_2 + \mu\,\frac{\mathrm{V}'^2}{2}\right).$$

[1] È il principio di Archimede applicato al campo centrifugo, anzichè al campo della gravità.

[2] L. Prandtl, *Tragflugeltheorie*, I Mitt, Nachrichten von der K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, 1918.

Ma poichè $\text{grad}\left(p_2 + \mu \frac{V'^2}{2}\right) = 0$, segue:

$$k = \mu (2 \Omega + \text{rot } V') \wedge V'.$$

Se ora indichiamo con γ il vettore *vorticità* nel moto riferito ad assi fissi, cioè:

$$\gamma = \text{rot } V = 2 \Omega + \text{rot } V'$$

si otterrà

$$k = \mu \gamma \wedge V'. \tag{10}$$

Questa è la formula che esprime, per il caso in oggetto, il teorema di Kutta-Joukowski nella forma elementare, dalla quale poi si risale senza difficoltà al teorema stesso nella sua forma finita e più nota [1].

Nella (10) la velocità da considerarsi è V', cioè quella del moto relativo, la vorticità γ (e quindi la circuitazione) è invece quella che compete al moto assoluto. In ciò sta l'unica differenza fra il caso considerato e quello dell'ordinario moto permanente.

Le precedenti considerazioni permettono di estendere al caso dell'elica le ricerche di Prandtl e dei suoi collaboratori, che si sono dimostrate così feconde nella teoria dei sistemi portanti. In particolare si estende la ben nota conclusione, che, ove si ha una spinta aerodinamica, deve aversi una circuitazione.

Se accanto ai vortici dello strato aderente al corpo (*vortici aderenti*) consideriamo quelli che fluiscono liberamente in seno al fluido (*vortici liberi*) non avremo che da porre nella (10) $k = 0$. Ne dedurremo

$$\gamma \wedge V' = 0$$

per il che si richiede che γ e V' abbiano la stessa direzione. In altri termini i vortici liberi del moto assoluto coincidono con le linee di corrente del moto relativo.

[1] Vedasi per questo: E. Pistolesi, *Teoria dei vortici applicata ai sistemi portanti*. Rendiconti dell'Istituto Sperimentale Aeronautico. 1922, 1° fasc.