ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

ANNO CCCXIX.

1922

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXXI.

2° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1922

Matematica. — *Una proprietà fondamentale degl'integrali doppi di 1ª specie.* Nota del Corrispondente Francesco Severi.

Per gl'integrali abeliani di 1ª e di 2ª specie vale la proprietà che se un integrale di 1ª o di 2ª specie ha tutti i suoi periodi nulli esso riducesi rispettivamente ad una costante o ad una funzione razionale. La stessa proprietà vale per gl'integrali semplici (picardiani) di 1ª e di 2ª specie appartenenti ad una superficie algebrica. In qual misura questa proprietà può trasportarsi agl'integrali doppi di 1ª e di 2ª specie appartenenti ad una superficie? Per gl'integrali doppi di 2ª specie è noto che un integrale siffatto della forma:

$$\iint \frac{Q(x\,,y\,,z)}{f'_z}\,dx\,dy$$

(ove Q sia un polinomio aggiunto alla superficie f, di equazione $f(x\,,y\,,z)=0$), il quale abbia nulli tutti i periodi relativi a cicli (finiti) a due dimensioni, riducesi necessariamente al tipo

$$\iint \left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{A}{f'_z}+\frac{\partial}{\partial y}\frac{B}{f'_z}\right) dx\,dy\,,$$

in cui A, B son polinomii aggiunti ad f (e le derivate son fatte tenendo conto che z è funzione implicita di $x\,,y$) [1]. Gl'integrali del tipo indicato nella teoria degl'integrali doppi fanno, anche da altri punti di vista, l'ufficio analogo a quello delle funzioni razionali nella teoria degli integrali semplici.

Per gl'integrali doppi di 1ª specie vale una proprietà assolutamente identica a quella valevole per gl'integrali semplici di 1ª specie; e cioè: *un integrale doppio di 1ª specie che abbia tutti i periodi nulli è una costante.*

La dimostrazione di questa proprietà costituisce l'oggetto della presente Nota [2].

1. Sia

$$I=\iint \frac{\varphi(x\,,y\,,z)}{f'_z}\,dx\,dy$$

(1) Picard et Simart, *Théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes* (Paris, Gauthier Villars, 1906), t. II, p. 365. Ved. pure Lefschetz, *Algebraic surfaces, their cycles and integrals* (Annals of mathematics, t. XXI, 1920, pag. 246). Viceversa, se il numero-base ϱ della superficie f vale 1, ogni integrale del tipo considerato ha nulli tutti i periodi relativi a cicli al finito; altrimenti ci vogliono altre condizioni: ved. Lefschetz, l. c. pag. 254.

(2) Alla probabile validità della proprietà qui dimostrata ebbe in passato occasione di accennarmi il sig. Lefschetz.

un integrale doppio di 1ª specie, appartenente alla superficie f di ordine m; talchè φ è un polinomio d'ordine $m-4$ aggiunto ad f. Supporremo, poichè non è restrittivo, che la f sia dotata di singolarità ordinarie (linea doppia e punti tripli) e che gli assi coordinati sieno disposti genericamente rispetto alla superficie. L'ipotesi da cui noi partiamo è che ogni periodo di I sia nullo (e basta anzi riferirsi ai soli periodi relativi a cicli a due dimensioni situati tutti al finito).

Sul piano η, ove imaginiamo distesa la variabile complessa y, segnamo i punti $b_1, b_2, \ldots, b_N$ corrispondenti a quei valori b tali che il piano $y=b$ sia tangente ad f; e consideriamo la riemanniana ad m fogli $R(y)$, che rappresenta la curva $f(x, y, z)=0$, per ogni dato y. Su questa riemanniana, quando y è prossimo ad uno generico, b, dei suddetti punti, vi sono due punti di diramazione M, N, che vanno a coincidere col punto di contatto del piano $y=b$, quando y va a cadere in b: e che connettono gli stessi due fogli di $R(y)$. Per le circolazioni di y attorno a b i punti M, N si scambiano fra di loro, e quindi il ciclo σ, che, sopra uno dei due fogli cui sopra si è alluso, circonda M, N, è un ciclo invariante di fronte alle circolazioni di y attorno a b e si riduce ad un punto quando y va in b.

Consideriamo l'area generata dal ciclo σ quando y varia da b ad un punto generico a del piano η, descrivendo il segmento ba. È un'area aperta $\varDelta$, che ha la forma di un dito di guanto, colla punta del dito nel punto di contatto del piano $y=b$, ed ha per contorno la posizione σ_a assunta da σ per $y=a$. Estendendo l'integrale ad una conveniente faccia di $\varDelta$ possiamo scrivere:

$$(1)\qquad \iint_{\varDelta} \frac{\varphi}{f'_z}\, dx\, dy = \int_a^b dy \int_\sigma \frac{\varphi}{f'_z}\, dx .$$

Diciamo Γ_a il pezzo finito della riemanniana $R(a)$, che ha per contorno σ_a. Esso, insieme a $\varDelta$, forma un ciclo chiuso a due dimensioni, e quindi, per l'ipotesi che I abbia tutti i periodi nulli, viene:

$$\iint_{\varDelta+\Gamma_a} \frac{\varphi}{f'_z}\, dx\, dy = 0 ,$$

in cui Γ_a denota una faccia conveniente dell'area omonima.

La precedente relazione si scrive pure:

$$\iint_{\varDelta} \frac{\varphi}{f'_z}\, dx\, dy = -\iint_{\Gamma_a} \frac{\varphi}{f'_z}\, dx\, dy ;$$

e poichè l'integrale di destra, essendo esteso ad un'area in cui y è costante (¹),

(¹) Nell'area Γ_a la funzione $\frac{\varphi}{f'_z}$ diventa infinita; ma ciò non dà noja alcuna, perchè l'integrale (1) è finito in ogni area finita (Cfr. Picard et Simart, t. I, pag. 178).

è nullo, così risulta nullo l'integrale a sinistra della (1), e quindi anche l'integrale a destra.

Poniamo:

$$\Omega(y) = \int_\sigma \frac{\varphi}{f'_z}\, dx\,,$$

ove Ω è il periodo al ciclo σ dell'integrale abeliano *di 1ª specie* $\int \frac{\varphi}{f'_z}\, dx$, appartenente alla curva $f(x\,, y\,, z) = 0$, per y parametro. Risulterà, in forza della (1):

$$\int_a^b \Omega(y)\, dy = 0\,.$$

Ora la funzione $\Omega(y)$, perfettamente definita lungo tutto il cammino d'integrazione, è olomorfa nell'intorno di $y = b$. Detto y un punto di questo intorno, variabile nel segmento ba, poichè y può far le veci di a, la funzione

$$\pi(y) = \int_b^y \Omega(y)\, dy$$

risulta nulla per ogni y, e quindi risulta pure *identicamente nulla*, nell'intorno di b, la funzione $\Omega(y) = \frac{d\pi}{dy}$.

Come si sa [1], un ciclo qualunque τ di $\mathrm{R}(y)$, quando y circola comunque sopra η, o è un ciclo invariante, oppure ritorna aumentato di una combinazione lineare a coefficienti interi dei cicli del tipo σ, relativi ai punti b. Poichè i periodi dell'integrale abeliano $\int \frac{\varphi}{f'_z}\, dx$ ai cicli σ, sono, secondo si è ora dimostrato, tutti quanti nulli, il periodo dell'integrale stesso lungo τ sarà una funzione uniforme $\lambda(y)$ in tutto il piano η. E siccome $\lambda(y)$ non può ammettere che singolarità logaritmiche o polari, trattandosi di una funzione uniforme, non potranno aversi che le seconde; cioè $\lambda(y)$ sarà una funzione razionale di y. Anzi, siccome la curva polare di $\frac{\varphi}{f'_z}$, che è l'intersezione di $f = 0\,, f'_z = 0$, fuori della linea doppia di f, non è contenuta nè tutta nè in parte in alcun piano $y =$ cost. (attesa la genericità degli assi), così $\lambda(y)$ sarà finita per ogni y finito e quindi si ridurrà ad un polinomio in y.

(1) Picard et Simart, t. II, pag. 334.

Si ricordi adesso che tutti i periodi d'un integrale del tipo $\int \frac{\varphi}{f'_z} dz$, ove φ sia un polinomio aggiunto d'ordine $\leq m - 3$, son nulli per $y = \infty$ (1). Ne deriva che $\lambda(y)$ si annulla per $y = \infty$ e quindi che è identicamente nulla.

Insomma l'integrale $\int \frac{\varphi}{f'_z} dx$ ha tutti i periodi nulli ed è quindi una costante; cioè il polinomio φ è identicamente nullo; donde, infine, la conclusione enunciata.

Biologia. — *Nuovo contributo allo studio dell'anofelismo (paludismo) senza malaria.* Nota del Socio B. Grassi.

Quest'anno ho potuto fare un nuovo passo nello studio dell'anofelismo senza malaria. Le ricerche, che qui riassumo, sono state eseguite in quella regione della Toscana, nella quale si è recentemente verificata una reviviscenza della malaria; è quella stessa regione che suddivisa in tre zone venne illustrata da Celli e Gasperini nella Memoria: *Stato palustre ed anofelico senza malaria* (1902), e contemporaneamente in parte (zona terza) nella Memoria: *Condizioni presenti e passate rispetto alla malaria nel territorio del comune di Massarosa* (1902) del benemerito medico-condotto dott. Francalanci.

È appunto alla seconda e alla terza di queste zone che si riferiscono anche le osservazioni da me pubblicate nella mia Memoria: *Animali domestici e malaria* (Annali d'Igiene, 1922).

Se in certi punti di questa regione nelle quali nonostante l'anofelismo considerevole, aumentato ancora più dalla mancata pulizia dei canali, la malaria non sia risorta affatto, io lo ignoro. Si sa invece che in diversi altri punti è rivissuta nel 1918 con un numero molto limitato di casi, i quali nel 1919 e nel 1920 erano già notevolmente diminuiti; mentre nel 1921 e nel 1922 (finora) non se ne verificò nessuno. Tra questi luoghi di reviviscenza effimera menziono in modo speciale Quiesa e Massaciuccoli, frazioni di Massarosa, dove esercita sempre il dott. Francalanci. Invece a Massarosa un piccol numero di casi si va verificando dal 1918 in poi (dott. Pellegrini); questo stato di cose sembra stazionario o quasi. È importante notare che a Quiesa, a Massaciuccoli e a Massarosa nel 1901 per quante ricerche facessi io non ero riuscito a scovare alcun caso di malaria autoctona, confermando così pienamente le osservazioni del Francalanci.

(1) Picard et Simart, t. II, pag. 419.