ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE
DEI LINCEI

ANNO CCCXIX.

1922

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXXI.

2° Semestre.

ROMA
TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1922

NOTE PRESENTATE DA SOCI

Analisi. — *Su una serie di funzioni razionali.* Nota di GIUSEPPE BELARDINELLI, presentata dal Socio S. PINCHERLE [1].

Le serie della forma

$$(1)\qquad f(x) = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{c_n}{(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\dots(x-\alpha_n)}$$

sono state studiate, in relazione all'aggregato $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \dots$, in casi molto limitati; benchè manifestino subito la loro importanza, essendo generalizzazione delle espressioni che fanno parte del materiale più usuale del calcolo: le serie di potenze per $\alpha_n = a$, le serie di fattoriali per $\alpha_n = n$.

Tra gli autori che le hanno trattate ricorderemo principalmente Frobenius [2], Landau [3], Schnee [4], Pincherle [5]. Fu prima studiato il caso che i numeri $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n, \dots$ siano reali ed abbiano un unico punto limite finito od infinito; poi, in casi particolari, quello in cui i numeri α_n siano complessi avendo un unico punto limite all'infinito.

In questa Nota studio le serie (1), nell'ipotesi che questi numeri α_n si trovino su una circonferenza c di raggio uno con centro nell'origine e formino un insieme denso su questa, dimostrando che sotto determinate condizioni per i coefficienti c_n la serie (1) è convergente lungo dei raggi, raggi di convergenza del Borel [6], oltrepassanti la detta circonferenza ed inoltre che questa è una linea singolare essenziale.

Esaminiamo, prima di tutto, gli sviluppi in serie di polinomi

$$\frac{1}{1-\frac{x}{\alpha_n}} = \sum_{p=0}^{p=\infty} \mathrm{P}_p\left(\frac{x}{\alpha_n}\right)$$

[1] Pervenuta all'Accademia il 27 settembre 1922.

[2] Frobenius, *Über die Entwiklung analytischer Funktionen in Reihen die nach gegeben Funcktionen fortschreiten*, Journal de Crelle, t. LXXIII (1871), pag. 1.

[3] Landau, *Sitzungsberichte der mathematisch. physikalischen Klasse der K. B. Akademie zu München*, t. XXXVI (1906), pag. 151.

[4] Schnee, *Über die irreguläre Potenzenreihen und Dirichletschen Reihen*, Inaugural Dissertation, Berlin, 1908.

[5] Pincherle, *Sulle serie di fattoriali generalizzate*, Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, t. 37 (1914), pag. 379.

[6] Borel, *Sur les séries de polynomes et de fractions rationnelles*, Acta mathematica, t. 24 (1901), pag. 309.

e determiniamo delle aree A_n in cui sono uniformemente ed assolutamente convergenti.

Prendiamo due numeri $R > 1$ ed r tale che $0 < r < 1$ e descriviamo una circonferenza c' avente per centro l'origine 0 e raggio R, ed un'altra c'' avente per centro il punto 1 e raggio r. Conduciamo da 0 le due tangenti al cerchio c'' ed indichiamo con a e b i loro punti di contatto, con a' e b' i punti d'intersezione di queste tangenti col cerchio c', a' essendo sul prolungamento di $0a$, e b' sul prolungamento di $0b$. Ciò fatto consideriamo il contorno composto dall'arco $\widehat{ab} < \pi$ del cerchio c', dai segmenti di retta aa' bb' e dall'arco $\widehat{a'b'} > \pi$ del cerchio c', l'area interna a questo contorno indichiamola con A. La funzione $\frac{1}{1-x}$, entro questa area, è rappresentabile da una serie di Goursat $\sum_{p=0}^{p=\infty} P_p(x)$ uniformemente ed assolutamente convergente ed avrà un massimo valore assoluto M. Ciò premesso, costruiamo delle aree A_n, analogamente alla area A, sostituendo il punto 1 con α_n, r con u_n, numeri positivi u_n che determineremo più avanti ed indichiamo con (u_n) i cerchi di centro α_n e raggio u_n, ed R arbitrariamente grande, ed indichiamo con M_n il massimo valore assoluto della funzione $\frac{1}{1-\frac{x}{\alpha_n}}$ in queste aree A_n, nelle quali $\sum_{p=0}^{p=\infty} P_p\left(\frac{x}{\alpha_n}\right)$ sarà uniformemente ed assolutamente convergente.

Fissiamo ora i raggi u_n dei cerchi (u_n) in modo che $\sum_{n=1}^{n=\infty} u_n$ sia convergente ed inoltre che

$$\sum_{h=n+1}^{h=\infty} u_h < \frac{u_n}{M_1 \cdot M_2 \cdot \cdots \cdot M_n}$$

e da questi u_n facciamo dipendere i coefficienti c_n in modo che

$$\sum_{h=n+1}^{h=\infty} u_h < c_n < \frac{u_n}{M_1 \cdot M_2 \cdot \cdots \cdot M_n}. \tag{2}$$

Avremo che le serie (1), così determinate, sono tali che i punti α_n sono punti singolari per le funzioni analitiche rappresentate da (1) rispettivamente dentro e fuori della circonferenza c.

Infatti

$$f(x) = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{(-1)^n c_n}{\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_3 \cdot \cdots \cdot \alpha_n} P_1\left(\frac{x}{\alpha_1}\right) . P_2\left(\frac{x}{\alpha_2}\right) \dots P_n\left(\frac{x}{\alpha_n}\right) \leq \tag{3}$$
$$\leq \sum_{n=1}^{n=\infty} c_n M_1 \cdot M_2 \cdot \cdots \cdot M_n$$

ed essendo $c_n < \dfrac{u_n}{M_1 \cdot M_2 \cdot \dots \cdot M_n}$ per la (2) e $\sum\limits_{n=1}^{n=\infty} u_n$ convergente, la (1) sarà assolutamente ed uniformemente convergente per tutti i valori di x interni alle aree A_n sopra definite, così all'interno ed all'esterno della circonferenza c.

Inoltre, avendo circondato i punti α_n con cerchi (u_n) tali che $\sum\limits_{n=1}^{n=\infty} u_n$ convergente, esisterà un'infinità non numerabile di raggi entro ogni angolo Θ, avente il vertice in 0, raggi oltrepassanti la circonferenza c e non passanti per nessun punto α_n [1], raggi di convergenza di Borel, tali che su di essi la serie (1) sarà pure assolutamente ed uniformemente convergente. Per studiare la $f(x)$ sulla circonferenza, consideriamo un punto α_p e scindiamo la serie in due parti

$$f(x) = \sum_{n=1}^{n=p-1} \frac{c_n}{(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_n)} +$$

$$+ \frac{1}{(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_p)} \left[c_p + \frac{c_{p+1}}{x-\alpha_{p+1}} + \frac{c_{p+2}}{(x-\alpha_{p+1})(x-\alpha_{p+2})} + \cdots \right],$$

per x tendente ad α_p la prima parte è finita, la seconda parte invece tende all'infinito, perchè la serie che vi comparisce, non essendo α_p radice dei denominatori, è convergente ed inoltre, per le (2), in modulo diversa da zero.

Infatti per ogni p si ha

$$\left| \frac{c_{p+1}}{x-\alpha_{p+1}} + \frac{c_{p+2}}{(x-\alpha_{p+1})(x-\alpha_{p+2})} + \cdots \right| \leq \left| \frac{c_{p+1}}{x-\alpha_{p+1}} \right| + \left| \frac{c_{p+2}}{(x-\alpha_{p+1})(x-\alpha_{p+2})} \right|$$

$$+ \cdots < c_{p+1} M_{p+1} + c_{p+2} M_{p+1} M_{p+2} + \cdots < u_{p+1} + u_{p+2} + \cdots < c_p .$$

Avremo dunque che i punti α_r sono effettivamente punti singolari per le funzioni analitiche rappresentate dalla (1) rispettivamente dentro e fuori della circonferenza c, che rappresenterà dunque all'interno una funzione analitica regolare $f_1(x)$, e così all'esterno una funzione analitica regolare $f_2(x)$ e non si potrà passare dall'una all'altra mediante il prolungamento analitico di Weierstrass.

[1] Borel, loc. cit. pag. 344.