ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

ANNO CCCXIX.

1922

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXXI.

2° SEMESTRE.

ROMA
TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1922

Geometria. — *Nuova trattazione della geometria proiettivo-differenziale delle curve piane.* Nota IV di GUSTAVO SANNIA, presentata dal Socio ENRICO D'OVIDIO.

17. Il triangolo normale PTN si è presentato naturalmente come triangolo di riferimento (n. 9), ma l'equazione (31) della conica osculatrice ne suggerisce un secondo; perchè, ponendo

$$\mathrm{X} - \mathrm{I}\,\mathrm{Z}/2 = \mathrm{X} - l\,\mathrm{Z} = a\xi\,, \quad \mathrm{Y} = \eta\,, \quad \mathrm{Z} = a^{-1}\zeta \quad (a \text{ cost})\,, \tag{41}$$

si riduce alla più semplice forma a cui possa ridursi l'equazione di una conica non degenere in geometria proiettiva: $\eta^2 - 2\xi\zeta = 0$. E così pure si semplificano le successive equazioni.

Poichè $\mathrm{X} - \mathrm{I}\,\mathrm{Z}/2 = 0$ o $\xi = 0$ rappresenta la retta t' già definita ([32]), eseguire la trasformazione (41) equivale a sostituire la retta t' al lato TN del triangolo normale, ottenendo il *triangolo canonico* di riferimento (Wilczynski) coi lati t, n, t' e che è autopolare rispetto alla conica.

In coordinate non omogenee

$$\lambda = \eta : \xi\,, \quad \mu = \zeta : \xi \tag{42}$$

la curva Γ avrà una equazione locale $f(\lambda, \mu) = 0$, rispetto al nuovo triangolo, da cui si può dedurre μ *come serie di potenze di* λ, *in un intorno di* P:

$$\left\{\begin{aligned} \mu = \lambda^2/_2 + \lambda^5 - \mathrm{I}\sqrt[3]{50}\,\lambda^7/_{14} + 10\,(42 + 9\,\mathrm{I}_1 + 22\,\mathrm{II}_1)\,\lambda^8/_{63} + \\ + 5\sqrt[3]{20}\,(2750\,\mathrm{I}^2 - 4579\,\mathrm{I}_2)\,\lambda^9/_{2592} + \mathrm{R}_{10}\,, \end{aligned}\right. \tag{43}$$

se si prende $a = -\sqrt[3]{20}$ *nelle* (41) ([33]).

([32]) In fine del n. 13. Cfr. ([27]).

([33]) Il che equivale a scegliere come punto unità $\mathrm{X} = 4\sqrt[3]{50} + \mathrm{I}$, $\mathrm{Y} = -2\sqrt[3]{20}$, $\mathrm{Z} = 2$.

Lo *sviluppo canonico* (43) dell'equazione di una curva è del Wilczynski, ma arrestato al termine in λ^7. Precisamente egli trova (a pag. 84)

$$\mu = \lambda^2/_2 + \lambda^5 + (-20)^{8/3}\,\theta_8\,\lambda^7/100800\,\theta_3^{8/3}\,.$$

Dal confronto dei due coefficienti di λ^7 si deduce che l'invariante assoluto $\theta_8 : \theta_3^{8/3}$, usato dal Wilczynski, vale $-9\,\mathrm{I}$.

Per una curva anarmonica (n. 16) la cui curvatura costante coincida con quella I che Γ ha nel punto P, lo sviluppo (43) coincide con quello di Γ fino al termine in λ^7; se ne deduce che *la curva anarmonica osculatrice a* Γ *in* P *ha con* Γ *un contatto di ordine* 7, quindi intermedio fra quelli (4 e 8) della conica e della cubica osculatrici.

Infatti le (41), per le (42), dànno

$$a\xi = 1 - l\sigma^2/_2 - (1 + l_1)\sigma^3/_3! + (2l^2 - l_2)\sigma^4/_4! + R_4,$$

da cui

$$(44)\qquad 1/a\xi = 1 + l\sigma^2/_2 + (1 + l_1)\sigma^3/_3! + (4l^2 + l_2)\sigma^4/_4! + R_5,$$

$$(45)\qquad 1/a^2\xi^2 = 1 + l\sigma^2 + (1 + l_1)\sigma^3/_3! + (7l^2 + l_2)\sigma^4/_{12} + R_5;$$

poi, moltiplicando (45) per la (30) (il cui primo membro si può scrivere $\eta^2 - 2\xi\zeta$), si ha

$$(46)\qquad (\lambda^2 - 2\mu)/a^2 = \sigma^5/_{10} + 8l\sigma^7/_{105} + (147 + 33l_1 -$$
$$- 352ll_1)\sigma^8/_7! + (12556l^2 + 2981l_2)\sigma^9/_9! + R_{10};$$

infine, moltiplicando la $(28)_2$ per la (44) e ricordando che $Y = \eta$, si ha

$$\lambda/a = \sigma + l\sigma^3/_6 + (3 + l_1)\sigma^4/_{24} + l_2\sigma^5/_{24} + R_6,$$

da cui

$$\lambda^5/a^5 = \sigma^5 + 5l\sigma^7/_6 + 5(3 + l_1)\sigma^8/_{24} + (15l_2 + 20l_2)\sigma^9/_{12} + R_{10},$$

$$\lambda^7/a^7 = \sigma^7 + 7l\sigma^9/_6 + R_{10}\quad,\quad \lambda^8/a^8 = \sigma^8 + R_{10}\quad,\quad \lambda^9/a^9 = \sigma^9 + R_{10}.$$

Risolvendo queste rispetto a $\sigma^9, \sigma^8, \sigma^7, \sigma^6$ e sostituendo in (46), si perviene alla (43), ricordando il valore di a e che $l = I/2$.

18. Termino con poche considerazioni duali.

Come coordinate della tangente t di Γ in P si possono prendere i complementi algebrici di x_2, y_2, z_2 in $|x\,x_1\,x_2|$ divisi per a_1, sicchè sarà

$$(47)\qquad \sum x\xi = \sum x_1\xi = \sum x\xi_1 = 0.$$

Le dirò *normali* (e tali le supporrò) se x, y, z sono normali. Allora, derivando ([34]) le (47) ed osservando che per la 1ª delle (24) è $\sum x_2\xi = a_1^2$, si ha

$$(48)\qquad \sum x_2\xi = -\sum x_1\xi_1 = \sum x\xi_2 = a_1^2;$$

derivando e tenendo conto che per la 1ª delle (23) è $\sum x_3\xi = 0$, si ha

$$(49)\qquad \sum x_3\xi = \sum x_2\xi_1 = \sum x_1\xi_2 = \sum x\xi_3 = 0;$$

derivando e tenendo conto che, per le precedenti e per la (22) (cui soddisfano x, y, z), è $\sum x_3\xi_1 = -a_1^2$, si ha

$$(50)\qquad \sum x_4\xi = -\sum x_3\xi_1 = \sum x_2\xi_2 = -\sum x_1\xi_3 = \sum x\xi_4 = -a_1^4 I;$$

e così via. Notiamo ancora solo le

$$(51)\qquad \sum x_3\xi_2 = -a_1^5 - a_1^4 I_1/2\quad,\quad \sum x_2\xi_3 = a_1^4 - a_1^4 I_1/2.$$

([34]) Covariantemente rispetto a (17).

La 1ª e la 3ª delle (47) e la 3ª delle (49) provano che $|\xi\,\xi_1\,\xi_3| = 0$, ossia che $\xi_3 = \alpha\xi + \beta\xi_1, \dots$ con α e β che si determinano facilmente sostituendo nella penultima della (50) e nella 2ª delle (51). Si conclude che: *le coordinate* ξ, η, ζ *della tangente* t *costituiscono un sistema fondamentale di soluzioni dell'equazione*

$$\psi_3 + a_1^2\, \mathrm{I}_1\, \psi_1 + a_1^2 (\mathrm{I}_1/2 - a_1)\, \psi = 0 \tag{52}$$

che può dirsi l'*aggiunta covariante di* (22) (35) dalla quale si deduce *cambiando soltanto* a_1 *in* $-a_1$. Onde, viceversa, (22) *è l'aggiunta di* (52); valgono quindi le formole

$$a_1^3 = -|\xi\,\xi_1\,\xi_2| \quad , \quad \mathrm{I} = -|\xi\,\xi_2\,\xi_3| : a_1^5$$

duali delle (24).

Ne segue che, *se si interpretano le* ξ, η, ζ *come coordinate normali di punto, si ha una curva duale di* Γ *avente la stessa curvatura* I *di* Γ *ed elemento lineare* $d\sigma$ *opposto.*

Per finire, tra le varie *espressioni miste* (formate con le $x, \dots$ e le $\xi, \dots$) della curvatura è notevole la seguente:

$$\mathrm{I} = -\sum x_2\, \xi_2 / \left(\sum x_1\, \xi_1\right)^2 ,$$

che si deduce dalle (48) e (49), perchè *formate con derivate prime e seconde soltanto.*

Fisica. — *Potere rotatorio creato in un mezzo isotropo a molecole simmetriche da un campo elettrico e magnetico longitudinali e costanti.* Nota del dott. ALDO PONTREMOLI, presentata dal Socio O. M. CORBINO (1).

In una Nota precedente (2) giungemmo alle equazioni di Maxwell per un'onda polarizzata rettilineamente propagantesi (in un mezzo isotropo a molecole simmetriche) nella direzione delle linee di forza di un campo elettrico e magnetico costanti.

Richiamiamoci senz'altro alle relazioni in essa stabilite, coi simboli usati; per le (7) si aveva

$$(n^2 - 1)\,\mathrm{X} - (1 + i\gamma n)\frac{\theta \mathrm{N}}{\Delta^2 - \psi^2}(\Delta \mathrm{X} + i\psi \mathrm{Y}) = 0$$

$$(n^2 - 1)\,\mathrm{Y} - (1 + i\gamma n)\frac{\theta \mathrm{N}}{\Delta^2 - \psi^2}(\Delta \mathrm{Y} - i\psi \mathrm{X}) = 0$$

(35) È nel caso $u = \sigma$ ($a_1 = 1$) è l'ordinaria aggiunta di (22), ossia di (22').

(1) Pervenuta all'Accademia il 23 agosto 1922.

(2) Questi Rendiconti 1922, sem. 2º, fasc. 7º e 8º, pag. 189.