ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE

DEI LINCEI

ANNO CCCXIX.

1922

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXXI.

2° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1922

La 1ª e la 3ª delle (47) e la 3ª delle (49) provano che $|\xi\,\xi_1\,\xi_3| = 0$, ossia che $\xi_3 = \alpha\xi + \beta\xi_1, \ldots$ con α e β che si determinano facilmente sostituendo nella penultima della (50) e nella 2ª delle (51). Si conclude che: *le coordinate ξ, η, ζ della tangente t costituiscono un sistema fondamentale di soluzioni dell'equazione*

$$\psi_3 + a_1^2\,\mathrm{I}_1\,\psi_1 + a_1^2\,(\mathrm{I}_1/2 - a_1)\,\psi = 0 \tag{52}$$

che può dirsi l'*aggiunta covariante di* (22) [35] dalla quale si deduce *cambiando soltanto a_1 in $-a_1$*. Onde, viceversa, (22) *è l'aggiunta di* (52); valgono quindi le formole

$$a_1^3 = -|\xi\,\xi_1\,\xi_2| \quad , \quad \mathrm{I} = -|\xi\,\xi_2\,\xi_3| : a_1^5$$

duali delle (24).

Ne segue che, *se si interpretano le ξ, η, ζ come coordinate normali di punto, si ha una curva duale di $\boldsymbol{\Gamma}$ avente la stessa curvatura* I *di $\boldsymbol{\Gamma}$ ed elemento lineare $d\sigma$ opposto.*

Per finire, tra le varie *espressioni miste* (formate con le $x, \ldots$ e le $\xi, \ldots$) della curvatura è notevole la seguente:

$$\mathrm{I} = -\sum x_2\,\xi_2/(\sum x_1\,\xi_1)^2\,,$$

che si deduce dalle (48) e (49), perchè *formate con derivate prime e seconde soltanto.*

Fisica. — *Potere rotatorio creato in un mezzo isotropo a molecole simmetriche da un campo elettrico e magnetico longitudinali e costanti.* Nota del dott. Aldo Pontremoli, presentata dal Socio O. M. Corbino [1].

In una Nota precedente [2] giungemmo alle equazioni di Maxwell per un'onda polarizzata rettilineamente propagantesi (in un mezzo isotropo a molecole simmetriche) nella direzione delle linee di forza di un campo elettrico e magnetico costanti.

Richiamiamoci senz'altro alle relazioni in essa stabilite, coi simboli usati; per le (7) si aveva

$$(n^2-1)\,\mathrm{X} - (1+i\gamma n)\,\frac{\theta\mathrm{N}}{\Delta^2-\psi^2}\,(\Delta\mathrm{X}+i\psi\mathrm{Y}) = 0$$

$$(n^2-1)\,\mathrm{Y} - (1+i\gamma n)\,\frac{\theta\mathrm{N}}{\Delta^2-\psi^2}\,(\Delta\mathrm{Y}-i\psi\mathrm{X}) = 0$$

(35) E nel caso $u = \sigma$ ($a_1 = 1$) è l'ordinaria aggiunta di (22), ossia di (22').

(1) Pervenuta all'Accademia il 23 agosto 1922.

(2) Questi Rendiconti 1922, sem. 2°, fasc. 7° e 8°, pag. 189.

da cui, sussistendo come è facile dimostrare, la relazione $Y = \pm iX$ tra i vettori elettrici nella perturbazione luminosa, si ricava immediatamente

$$n^2 - (1 + i\gamma n)\frac{\theta N}{\Delta \pm \psi} - 1 = 0 \tag{8}$$

dove n è complesso: ci sarà quindi ora possibile determinare gli indici di rifrazione n_1 e n_2 ed i coefficienti di assorbimento x_1 e x_2 delle due onde circolarmente polarizzate che si propagano nella direzione delle linee di forza dei campi esterni. Poniamo

per l'onda destrorsa $\quad n = n_1 - ix_1$

per l'onda sinistrorsa $\quad n = n_2 - ix_2$

si avrà dalla (8)

$$\begin{aligned} (n_1 - ix_1)^2 - [1 + \gamma(in_1 + x_1)]\frac{\theta N}{\Delta + \psi} - 1 = 0 \\ (n_2 - ix_2)^2 - [1 + \gamma(in_2 + x_2)]\frac{\theta N}{\Delta - \psi} - 1 = 0 \end{aligned} \tag{9}$$

le quali, come è logico, non differenziano che pel segno di ψ. Ma Δ è complesso: ricordando le (5), sia

$$\frac{\Delta}{\theta N} = \alpha + i\beta \quad , \quad \psi' = \frac{\psi}{\theta N}$$

dove α e β sono reali, e sia ancora

$$\begin{aligned} (\alpha + \psi')^2 + \beta^2 = \nabla_1 \\ (\alpha - \psi')^2 + \beta^2 = \nabla_2 . \end{aligned}$$

Dalla prima delle (9) si otterranno, separando la parte reale dalla immaginaria, le equazioni

$$\begin{aligned} n_1^2 - x_1^2 - \left[(1 + \gamma x_1)\frac{\alpha + \psi'}{\nabla_1} + \gamma n_1 \frac{\beta}{\nabla_1}\right] - 1 &= 0 \\ 2n_1 x_1 - \left[(1 + \gamma x_1)\frac{\beta}{\nabla_1} - \gamma n \frac{\alpha + \psi'}{\nabla_1}\right] \quad &= 0 \end{aligned}$$

dove, mutando segno a ψ', si avranno le equazioni corrispondenti alla seconda delle (9).

Dalla ultima relazione si ricava immediatamente

$$n_1 = \frac{\frac{\beta}{\nabla_1}(1 + \gamma x_1)}{2x_1 + \gamma \frac{\alpha + \psi'}{\nabla_1}} \quad , \quad x_1 = \frac{\frac{\beta}{\nabla_1} - \gamma n_1 \frac{\alpha + \psi'}{\nabla_1}}{2n_1 - \gamma \frac{\beta}{\nabla_1}} \tag{10}$$

e pertanto, sostituendo,

$$(11)\qquad n_1^4 - \frac{2\gamma\beta}{\nabla_1} n_1^3 + n_1^2 \left[\frac{\gamma^2}{4\nabla_1}\left(1+\frac{4\beta^2}{\nabla_1}\right) - \left(1+\frac{\alpha+\psi'}{\nabla_1}\right)\right] +$$
$$+ n_1\left[\frac{\gamma\beta}{\nabla_1}\left(1+\frac{\alpha+\psi'}{\nabla_1}-\frac{\gamma^2}{4\nabla_1}\right)\right] - \left[\frac{\beta^2}{4\nabla_1^2}(1+\gamma^2)\right]=0$$

e

$$(12)\ x_1^4 + 2\gamma\frac{\alpha+\psi'}{\nabla_1}x_1^3 + x_1^2\left[\frac{\gamma^2}{4\nabla}\left(1+4\frac{(\alpha+\psi')^2}{\nabla_1}\right)+\left(1+\frac{\alpha+\psi'}{\nabla_1}\right)\right] +$$
$$+ x_1\left[\gamma\frac{\alpha+\psi'}{\nabla_1}\left(1+\frac{\alpha+\psi'}{\nabla_1}+\frac{\gamma^2}{4\nabla_1}\right)\right] +$$
$$+ \left[\gamma^2\frac{\alpha+\psi'}{4\nabla_1^2}(1+\alpha+\psi') - \frac{\beta^2}{4\nabla_1^2}\right]=0\,.$$

Colla sostituzione

$$(13)\qquad n_1 = m_1 + \frac{\gamma\beta}{2\nabla_1}$$

la (11) diventa

$$m_1^4 + m_1^2\left[\frac{\gamma^2}{4\nabla_1}\left(1-\frac{2\beta}{\nabla_1}\right) - \right.$$
$$\left. - \left(1+\frac{\alpha+\psi'}{\nabla}\right)\right] - \left[\frac{\beta}{2\nabla_1}\left(1-\gamma^2\frac{\alpha+\psi'}{2\nabla_1}\right)\right]^2 = 0\,.$$

Se, come avviene nelle attuali possibili condizioni sperimentali, γ è trascurabile rispetto a γ^2, questa equazione diventa

$$m_1^4 - m_1^2\left(1+\frac{\alpha+\psi'}{\nabla_1}\right) - \frac{\beta^2}{4\nabla_1^2} = 0$$

la quale si identifica con quella che determina l'indice di rifrazione n_{01} dell'onda destrorsa in presenza del solo campo magnetico. Pertanto $m_1 = n_{01}$ e per la (13)

$$(14\,a)\qquad n_1 = n_{01} + \frac{\gamma\beta}{2\nabla_1}$$

e, differenziando n_2 da n_1 solo pel segno di ψ',

$$(14\,b)\qquad n_2 = n_{02} + \frac{\gamma\beta}{2\nabla_2}\,.$$

In modo del tutto analogo, e negli stessi limiti di approssimazione, è lecito, operando sulla (12), ricavare

$$(15\,a)\qquad x_1 = x_{01} - \gamma\,\frac{\alpha+\psi'}{2\nabla_1}$$

$$(15\,b)\qquad x_2 = x_{02} - \gamma\,\frac{\alpha-\psi'}{2\nabla_2}$$

ove (come rispettivamente per n_{01} e n_{02}), x_{01} e x_{02} sono i valori di x_1 e di x_2 per $E = 0$.

Pertanto la presenza del campo elettrico longitudinale esterno altera tanto la velocità di propagazione come i coefficienti di assorbimento delle due onde polarizzate circolarmente: ne potrà conseguire una variazione nel potere rotatorio, nella posizione del doppietto in cui si separa ogni riga di assorbimento per effetto del campo magnetico, e nell'ellitticità.

A tal uopo consideriamo le due componenti $D(X_D, Y_D)$, $S(X_S, Y_S)$ in cui si può scindere il vettore elettrico $R(X, Y)$ dell'onda incidente, modificata per la presenza dei campi; sarà

$$\text{onda destrorsa}\begin{cases} X_D = \text{p. r.}\quad A\, e^{-\frac{2\pi z}{\lambda} x_1} \cdot e^{\frac{i}{t}\left(t - \frac{n_1}{c} z\right)} \\ Y_D = \text{p. r.} + Ai\, e^{-\frac{2\pi z}{\lambda} x_1} \cdot e^{\frac{i}{t}\left(t - \frac{n_1}{c} z\right)} \end{cases}$$

$$\text{onda sinistrorsa}\begin{cases} X_S = \text{p. r.}\quad A\, e^{-\frac{2\pi z}{\lambda} x_2} \cdot e^{\frac{i}{t}\left(t - \frac{n_2}{c} z\right)} \\ Y_S = \text{p. r.} - Ai\, e^{-\frac{2\pi z}{\lambda} x_2} \cdot e^{\frac{i}{t}\left(t - \frac{n_2}{c} z\right)} \end{cases}$$

Le componenti S e D del vettorè elettrico R ad un dato istante t, e dopo avere attraversato uno spessore z del mezzo, formeranno rispettivamente coll'asse delle x gli angoli

$$X\widehat{O}D = -\frac{t}{\tau} + \frac{2\pi z}{\lambda} n_1$$

$$X\widehat{O}S = \frac{t}{\tau} - \frac{2\pi z}{\lambda} n_2$$

La bisettrice dell'angolo $D\widehat{O}S$, per una z determinata è fissa per qualunque t, e forma con l'asse delle x l'angolo ϱ

$$\varrho = \frac{\pi z}{\lambda}(n_1 - n_2).$$

La luce emergente è polarizzata ellitticamente; il vettore elettrico che, all'entrata nel mezzo, era diretto secondo Ox, descrive ora una ellisse con l'asse maggiore secondo la bisettrice fissa di $\widehat{LOD}$.

I semiassi della elisse hanno per lunghezza

$$A\left(e^{-\frac{2\pi z}{\lambda} x_1} + e^{-\frac{2\pi z}{\lambda} x_2}\right),\quad A\left(e^{-\frac{2\pi z}{\lambda} x_1} - e^{-\frac{2\pi z}{\lambda} x_2}\right).$$

L'angolo ϱ è il potere rotatorio risultante e pertanto, detto ϱ_m il potere rotatorio d'origine puramente magnetica, si avrà per le (14)

$$\begin{aligned} \varrho &= \varrho_m + \frac{\pi z}{2\lambda}\gamma\beta\left(\frac{1}{\nabla_1} - \frac{1}{\nabla_2}\right) \\ &= \varrho_m - \frac{2\pi^2 z}{\lambda^2}\zeta\,\frac{\alpha\beta\psi'}{\nabla_1\nabla_2} \end{aligned}$$

o anche

$$\varrho = \varrho_m - \frac{2\pi^2 z}{\lambda^2}\,\mathrm{K}_\varrho\,\mathrm{EH}$$

dove K_ϱ è una funzione pari di H e contiene inoltre costanti caratteristiche del mezzo impiegato.

Il potere rotatorio di tipo ordinario esiste dunque teoricamente nella direzione delle linee di forza con le peculiarità che la teoria delle simmetrie lasciava anticipare.

L'ellitticità è definita come rapporto tra il piccolo e il grande asse, ossia

$$\varepsilon = \frac{e^{-\frac{2\pi z}{\lambda}x_1} - e^{-\frac{2\pi z}{\lambda}x_2}}{e^{-\frac{2\pi z}{\lambda}x_1} + e^{-\frac{2\pi z}{\lambda}x_2}} = \mathrm{tgh}\left[\frac{\pi z}{\lambda}(x_2 - x_1)\right],$$

ma fuori delle righe d'assorbimento il valore dell'espressione tra parentesi è piccolo, onde può scriversi

$$\varepsilon = \frac{\pi z}{\lambda}(x_2 - x_1)$$

cioè per le (15)

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{\pi z}{\lambda}(x_{02} - x_{01}) - \frac{\gamma}{2}\left(\frac{\alpha - \psi'}{\nabla_2} - \frac{\alpha + \psi'}{\nabla_1}\right) \\ &= \varepsilon_m + \frac{\pi z}{\lambda}\,\mathrm{K}_\varepsilon\,\mathrm{EH}\,. \end{aligned}$$

dove ε_m è l'ellitticità dovuta alla presenza del solo campo magnetico e K_ε è anch'essa funzione pari di H e caratteristica del mezzo.

Dunque anche nei riguardi dell'ellitticità, per la sovrapposizione del campo elettrico E, il mezzo è modificato come se nella direzione delle linee di forza fosse dotato di potere rotatorio ordinario.

Per analizzare lo spostamento delle righe di assorbimento richiamiamo la (8); è

$$n^2 - (1 + i\gamma n)\frac{\theta \mathrm{N}}{\varDelta \pm \psi} - 1 = 0 \tag{16}$$

per $E = H = 0$, sarà

$$n_0^2 - \frac{\theta N}{\Delta} - 1 = 0$$

e il centro della riga di assorbimento cadrà nel punto dello spettro ove $\tau = \tau_p$, ossia per la (5) e per essere $\theta N \alpha = 1 - \frac{\tau^2}{\tau_p^2}$, nel punto ove $\alpha = 0$. Sia n_0^0 il valore dell'indice di rifrazione complesso nel centro della riga in assenza dei campi; dovrà essere

$$n_0^{0\,2} - \frac{1}{i\beta} - 1 = 0 \,. \tag{17}$$

La posizione, attivati i campi, in cui è $n = n_0^0$, si dedurrà evidentemente dalle (16) e (17), nei punti ove

$$\frac{1}{i\beta} = \frac{1 + i\gamma n_0^0}{\Delta \pm \psi}\,\theta N = \frac{1 + i\gamma n_0}{\alpha \pm \psi' + i\beta}$$

ossia, ove

$$\alpha \pm \psi' + \beta\gamma n_0^0 = 0 \,. \tag{18}$$

Detta relazione, paragonata a quella che si ottiene ponendo $E = 0$, essendo β e n_0^0 ognora positivi, ci dimostra che i centri delle due righe di assorbimento si spostano verso il violetto se $\gamma > 0$, e reciprocamente.

Ossia, in generale, se lo spostamento dell'elettrone di polarizzazione, dovuto al campo elettrico esterno, avviene nel senso della propagazione luminosa, il doppietto va verso il violetto, se in senso contrario si sposta verso il rosso, ed in ogni modo è assimetrico rispetto la riga normale.

Ma estrinsecando τ, si ponga

$$\beta = \frac{1}{\theta N}\frac{a}{\tau} \,,\; \gamma = \frac{\zeta}{2c\tau} = \frac{\gamma_0}{\tau} \,,\; \psi' = \frac{\psi}{\theta N} = \frac{\psi_0}{\theta N \tau} \,,\; \alpha = \frac{1}{\theta N}\left[1 - \frac{\tau^2}{\tau_p^2}\right],$$

la (18) può scriversi

$$\tau^2 \pm \psi_0 \tau - [\tau_p^2 - a\gamma_0 n_0^0] = 0$$

che confrontata all'equazione corrispondente per $E = 0$ ci dimostra come l'azione del campo elettrico esterno possa assimilarsi, in questi riguardi, ad una variazione del periodo normale di risonanza dell'elettrone di polarizzazione, con le caratteristiche qualitative anzidette.

Quantitativamente, data la piccolezza di γ in virtù dei campi elettrici attualmente applicabili, le variazioni sembrano sfuggire per ora ad una verifica sperimentale.

Per $H = 0$, otterremo le sole modificazioni causate dalla presenza del campo elettrico esterno. Ricordando che tutte le quantità trattate con indice 1 differiscono da quelle con indice 2 solo pel segno di ψ', che ora si annulla, il potere rotatorio e l'ellitticità si annullano, il che era anche prevedibile per ragione di simmetria: la luce, attraversato il mezzo, esce polarizzata rettilineamente così come era entrata. Varia però l'indice di rifrazione, il coefficiente di assorbimento e la posizione della riga di assorbimento dovuta all'elettrone di polarizzazione esistente; avremo così

$$n_E = n_0 + \frac{\gamma\beta}{2(\alpha^2 + \beta^2)}$$

$$x_E = x_0 - \frac{\gamma\alpha}{2(\alpha^2 + \beta^2)}$$

$$\tau_E = \sqrt{\tau_p^2 - a\gamma_0 n_0^0}$$

ove $2\pi\tau_E$ è il periodo corrispondente alla nuova posizione della riga di assorbimento ed n_E, x_E sono il nuovo indice di rifrazione e il nuovo coefficiente di assorbimento, sempre nei limiti di approssimazione inizialmente impostici.

Non sono da ricercarsi nel presente schema azioni corrispondenti a quelle che accompagnano il fenomeno Stark - Lo Surdo, non rientrando esse nella teoria elettromagnetica.

Chimica. — *Intorno alla reazione fra il selenio ed il nitrato d'argento in soluzione acquosa* [1]. Nota di F. Garelli e A. Angeletti, presentata dal Socio Paternò [2].

La prima osservazione intorno all'azione del selenio sopra le soluzioni metalliche risale al 1860 ed è dovuta al Parkman [3]. Questi sperimentò l'azione dello zolfo, selenio, tellurio, fosforo, arsenico ed antimonio sopra le soluzioni di sali di rame, argento e piombo e trovò, che dalla soluzione di nitrato di argento il selenio rosso precipita una polvere nera contenente argento e selenio. La soluzione di solfato di rame non viene alterata, laddove quella di acetato fornisce pure un precipitato nero, che sembra costituito da seleniuro di rame. Dieci anni dopo il Guyot [4], in una brevissima Nota, comunicò che, il selenio, disciolto in solfuro di carbonio, precipita da soluzioni saline neutre od acide dei metalli, soltanto il nitrato d'argento allo

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica tecnologica del R. Politecnico di Torino.

(2) Pervenuta all'Accademia il 16 ottobre 1922.

(3) *On a new mode of formation compounds of metals.* Jahresbericht ueber Fortschritte der Chemie, di Liebig e Kopp, 1861, pag. 126. Inaugural. Diss. Göttingen. 1860.

(4) C. R., 1871, 1° sem., pag. 685.