ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

ANNO CCCXIX.

1922

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXXI.

2° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1922

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 19 novembre 1922.

F. D'Ovidio, Presidente.

NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sulla rappresentazione iperspaziale delle curve piane.* Nota di Enrico Bompiani, presentata dal Socio Castelnuovo [1].

1. Il prof. Severi ha sottoposto di recente ad un esame critico approfondito alcune questioni di esistenza di curve piane soddisfacenti a condizioni assegnate [2] ed ha trovato opportuno riferirsi alla rappresentazione delle C^n piane sui punti di un S_N $\left(N=\frac{n(n+3)}{2}\right)$: in particolare le C^n con un punto doppio dan luogo ad una ipersuperficie M, d'ordine $3(n-1)^2$, contenente ∞^2 S_{N-3} (i punti di un S_{N-3} corrispondono alle C^n con punto doppio assegnato).

Qualora si voglia continuare questo studio (e già il caso delle cuspidi presenta notevole interesse) è necessario avere una rappresentazione delle C^n dotate di singolarità più elevate.

Assegno in questa Nota l'*effettiva costruzione delle varietà che rappresentano C^n dotate di singolarità (a distanza finita o infinitesima) a par-*

[1] Pervenuta all'Accademia il 7 ottobre 1922.

[2] F. Severi, *Vorlesungen über algebraische Geometrie* [Teubner, Leipzig-Berlin, 1921], Anhang F (pag. 307).

tire dalle superficie (che dirò di Veronese) $F_2^{n^2}$ *di* S_N *che pure si assumono a rappresentare le* C^n *piane* (¹).

Il ponte di passaggio fra le rappresentazioni — per dirla in breve — di Severi e di Veronese sta in quelle nozioni di geometria proiettivo-differenziale di cui mi sono più volte servito e che si ripresentano anche qui con carattere di assoluta necessità.

2. Superficie di Veronese: interpretazione dei loro spazi osculatori. Curve spezzate. — Si considerino le rette di un piano π ciascuna contata n volte: alle ∞^2 rette del piano si facciano corrispondere gli ∞^2 punti della superficie $F_2^{n^2}$ di S_N che hanno per coordinate proiettive omogenee i coefficienti dello sviluppo di $\left(\sum_1^3{}_i\, a_i x_i\right)^n$ essendo $\sum_1^3{}_i\, a_i x_i = 0$ l'equazione della retta. Alle rette (contate n volte) passanti per un punto corrispondono su F i punti di una curva razionale normale d'ordine n che indicherò con γ (o γ^n); brevemente: ai punti di π corrispondono le curve γ di F.

Si consideri lo spazio k — osculatore (²), che indico con $S(k) \equiv S_{\frac{k(k+3)}{2}}$, in un punto H di F. Vale il teorema seguente: *le* C^n *spezzate in una retta* $(n-k)$-pla *e in una* C^k *sono rappresentate dai punti dello* $S(k)$ *osculatore ad* F *nel punto* H *che rappresenta la retta* $(n-k)$-pla [così p. es. le C^n spezzate in una retta $(n-1)$-pla ed in una semplice si rappresentano sulla V_4 dei piani tangenti ad F; le C^n spezzate in una C^{n-1} ed in una retta nei punti della V_{N-n+1} luogo degli $S(n-1)$ osculatori ad F] (³). *La rappresentazione della* C^k *residua* [punto di $S(k)$] *si fa nello stesso modo rispetto alla superficie di Veronese* $F_2^{k^2}$, *contenuta in*

(¹) Vedansi (particolarmente per le coniche) le Memorie di Veronese, *La superficie omaloide* etc. [Mem. Lincei, 19 (3), 1883-84] e di Segre, *Considerazioni intorno alla geometria delle coniche* etc. [Atti Acc. Torino, 20, 1885] e i capitoli 14 e 15 della *Introduzione alla geometria proiettiva degli iperspazi* di E. Bertini [Pisa, Spoerri, 1907]. Nella Memoria di G. Bordiga, *Sul modello minimo della varietà delle n-ple non ordinate dei punti di un piano* [Ann. di Matem., s. III, t. XXVII, 1918] si trova studiata, in forma duale, la M_{2n} delle C^n spezzate in n rette (ved. in particolare i nn. 5-8).

(²) È lo spazio ambiente degli S_k osculatori alle curve di F uscenti da un suo punto (per $k=1$ si ha il piano tangente); può vedersi p. es. la mia Memoria: *Proprietà differenziali caratteristiche di enti algebrici* [Mem. Lincei, 13 (5), 1921] che ha qualche relazione con questo lavoro.

(³) Naturalmente ogni configurazione proiettivamente legata ad F ha interesse per la rappresentazione delle C^n; così lo S_k osculatore ad una γ in un suo punto H rappresenta le C^n composte di una retta $(n-k)$-pla (corrisp. ad H) e di k rette passanti per un suo punto (corrisp. a γ). Ancora: lo spazio $S_{\frac{(k+1)(k+2)}{2}-1}$ tangente in un punto alla varietà degli ∞^2 $S(k)$ osculatori ad F rappresenta le C^n spezzate in una retta $(n-k-1)$-pla [corrisp. al punto d'osculazione con F dello $S(k)$ contenuto in $S_{\frac{(k+1)(k+2)}{2}+1}$] in una retta semplice e in una C^k. Etc.

$S(k)$ *che riesce osculatrice* (*con contatto d'ordine* k) *alla* $F_2^{n^2}$ *di* S_N *in* H [1] (sicchè p. es. una C^n spezzata in una retta $(n-k)$-pla e in una k-pla rappresentate rispett. dai punti H e H' di $F_2^{n^2}$ è rappresentata dal punto di intersezione dello $S(k)$ osculatore in H e dello $S(n-k)$ osculatore in H', o, ciò che fa lo stesso, dall'intersezione degli S_k e S_{n-k} osculatori in H e H' alla curva γ che li congiunge: punto che appartiene alle due superficie $F_2^{k^2}$ e $F_2^{(n-k)^2}$ osculatrici ad $F_2^{n^2}$ in H e H').

Si ha così la rappresentazione delle C^n spezzate in una o più rette (semplici o multiple) e in una curva residua.

Per rappresentare le C^n spezzate in una C^k e in una C^{n-k} si associ ad una C^k fissata una retta $(n-k)$-pla: *al variare di questa il punto rappresentativo della* C^n *così spezzata descrive una* $F_2^{(n-k)^2}$ *il cui ambiente rappresenta con i suoi punti le* C^n *spezzate nella* C^k *fissata e in una residua* C^{n-k}.

3. CURVE NODATE E CUSPIDATE. — Si considerino su $F_2^{n^2}$ una curva γ e gli $S(n-2)$ osculatori ad F nei punti di γ: questi appartengono ad uno spazio S_{N-3} che può dirsi $(n-2)$ — osculatore ad F lungo γ. *I punti di* S_{N-3} *sono le imagini delle* C^n *che hanno un nodo nel punto* (*di* π) *rappresentato* (*su* F) *da* γ. Gli ∞^2 S_{N-3} relativi alle ∞^2 curve γ costituiscono l'ipersuperficie M delle C^n nodate.

Gli S_{N-1} tangenti ad M sono ∞^2 (ciascuno essendo fisso lungo l'S_{N-3} che contiene): uno di essi può costruirsi come spazio $(n-1)$— osculatore ad F lungo una curva γ (cioè congiungente n curve $\gamma_1\gamma_2 \ldots \gamma_n$ infinitamente vicine) e rappresenta le C^n passanti per il punto che ha per immagine γ.

Si consideri poi l'S_{N-6} $(n-3)$— osculatore lungo una γ (cioè congiungente $\gamma_1\gamma_2 \ldots \gamma_{n-2}$) e da esso si proiettino gli $S(n-2)$ osculatori (ad F) nei punti di γ: si ottengono ∞^1 S_{N-5} costituenti un cono quadrico V_{N-4}^2 che ha per ambiente l'S_{N-3} di prima relativo a γ. Gli S_{N-4} tangenti congiungono gli S_{N-5} relativi a due punti infinitamente vicini di γ: diciamo uno di essi punto di contatto dello S_{N-4} con γ. Per un punto generico di S_{N-3} passano due S_{N-4} tangenti a V^2 e i loro punti di contatto con γ rappresentano le tangenti nodali della C^n che ha per immagine il punto di S_{N-3}. Completiamo quindi l'enunciato precedente così:

Le C^n *con cuspide e tangente cuspidale assegnata si rappresentano nei punti dello* S_{N-5} *congiungente lo spazio* $(n-3)$ — *osculatore ad* F *lungo una* γ (*cuspide*) *con lo* $S(n-2)$ *osculatore in un suo punto* (*tangente cuspidale*): *al variare di questo su* γ, *lo* S_{N-5} *descrive un cono* V_{N-4}^2 *rappresentante le* C^n *con cuspide assegnata; i punti di uno* S_{N-4} *tangente rappresentano le* C^n *con nodo ed* una *tangente nodale assegnata.*

[1] L'esistenza e la costruzione della superficie di Veronese osculatrice si trova nella mia Memoria citata, ultimo enunciato del n. 9.

4. Curve con punti multipli. — In modo analogo guadagniamo la rappresentazione delle C^n *con un punto* k-plo: *essa è la varietà costituita dagli* ∞^2 *spazi* $S_{N-\frac{k(k+1)}{2}}$ *che riescono* $(n-k)$ — *osculatori ad* F *lungo le sue* ∞^2 *curve* γ (¹).

Fissiamo una γ (quindi il punto k-plo) e consideriamo inoltre lo $S_{N-\frac{(k+1)(k+2)}{2}} \equiv S_{N-K-1}$ $\left(K = \frac{k(k+3)}{2}\right)$ che riesce $(n-k-1)$ — osculatore ad F lungo γ e da questo proiettiamo gli $S(n-k)$ osculatori nei singoli punti di γ: si ottengono così ∞^1 S_{N-K} generatori di un cono V^k_{N-K+1}. Se di più si considerano gli spazi $S_{N-\frac{k(k+1)}{2}-1}$ che hanno un contatto d'ordine k con questo cono (congiungenti lo S_{N-K} relativo ad un punto di γ, che si dirà d'osculazione, con gli spazi così costruiti per $k-1$ punti infinitamente vicini su γ), situati nell'ambiente del cono $S_{N-\frac{k(k+1)}{2}}$, per ogni punto di questo passano k di quegli spazi e i loro k punti d'osculazione con γ rappresentano le k tangenti nel punto k-plo; queste possono essere in tutto o in parte distinte. Coincidono p. es. tutte se il punto considerato si trova sul cono V^k_{N-K+1}, il quale dunque rappresenta le C^n con punto k-plo assegnato e con tangente k-pla (che rimane fissata quando si fissi lo spazio generatore del cono): *il luogo di questi* ∞^2 *coni* (*al variare di* γ) *rappresenta la totalità delle* C^n *che posseggono un punto* k-plo *con tangente* k-pla (ivi).

5. Punti multipli successivi. — Chiuderò questa Nota indicando la rappresentazione delle C^n dotate di due punti doppi infinitamente vicini (tacnodo).

Si consideri una γ (immagine del tacnodo) ed un suo punto H (immagine della tangente tacnodale): si congiunga poi lo S_{N-10} $(n-4)$ — osculatore ad F lungo tutta la γ con gli spazi $(n-3)$ — osculatori ad F in H e in due punti H′ e H″ infinitamente vicini ad H su γ (si ottiene così un S_{N-7}) e con lo spazio $(n-2)$ — osculatore ad F in H: *lo spazio congiungente*, S_{N-6}, *rappresenta coi suoi punti le* C^n *che hanno il tacnodo e la tangente tacnodale assegnati.*

Invece: *lo spazio* S_{N-8} *congiungente lo* S_{N-10} *con lo spazio* $(n-2)$ — *osculatore ad* F *in* H *rappresenta le* C^n *di prima per le quali il tacnodo è armonico* (secondo la denominazione di Segre).

6. La rappresentazione analitica delle varietà così introdotte (e delle analoghe) si ha dalla notissima rappresentazione parametrica della F con sole *operazioni di derivazione*: indi la formazione d'invarianti per le forme ternarie.

(¹) Il risultato vale anche per $n=k$: la varietà degli ∞^2 S_n delle γ rappresenta, coi suoi punti, le C^n spezzate in n rette formanti fascio.