ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE
DEI LINCEI

ANNO CCCXIX.

1922

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXXI.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1922

Per mezzo della (2), e seguendo un procedimento noto ([1]), si può ottenere l'espressione del numero P_N dei primi inferiori ad un intero assegnato N. Posto, infatti,

$$\theta_k(x) = \sum_1^k {}_n \frac{1}{n} \sum_1^n {}_h \cos \frac{2hkx}{n},$$

il limite

$$\lim_{x=\pi} \frac{\operatorname{sen} \pi [\theta_k(x) - 2]}{\pi [\theta_k(x) - 2]},$$

per $k > 1$, vale 1, o zero, secondochè k è, o non è primo. Abbiamo dunque

$$P_N = 1 + \lim_{x=\pi} \sum_2^N {}_k \frac{\operatorname{sen} \pi [\theta_k(x) - 2]}{\pi [\theta_k(x) - 2]}.$$

Fisica matematica. — *Sulla deformazione piana di un cilindro elastico isotropo.* Nota del dott. Nicolas Mouskhelichvili. Estratto da una lettera dell'Autore al Presidente V. Volterra.

Je considère le cas de déformation plane d'un cylindre élastique isotrope, cas important qui est connu dans la littérature allemande sous le nom « das ebene Problem » ([2]).

Je suppose que le corps n'est sollicité par aucune force extérieure, sauf les tensions, appliquées aux bases qui ont pour but de maintenir la déformation plane. De plus, je suppose que le corps est échauffé par un flux permanent de chaleur, la température T aussi dépendant de deux variables x et y seulement.

Alors, en adoptant la loi de Duhamel et de Neumann (cfr. Love, l. c., § 74, p. 128), le problème de l'équilibre revient à intégrer les équations à dérivées partielles

$$\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} = 0 , \quad \frac{\partial X_y}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} = 0 , \tag{1}$$

([1]) Cfr. Von Koch, Nota citata, pag. 852.

([2]) Cfr. *Encykl. d. Math. Wiss.*, Bd. IV, 25, Nr. 11; A. E. H. Love, *Lehrbuch der Elastizität*, Kap. IX (Lpz. 1907).

$$(2)\qquad X_x = -\beta T + \lambda\Delta + 2\mu\frac{\partial u}{\partial x}\ ,\ Y_y = -\beta T + \lambda\Delta + 2\mu\frac{\partial v}{\partial y}\ ,$$

$$X_y = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right),$$

β , λ , μ désignant les constantes, $T = T(x , y)$ la température et

$$\Delta \equiv \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\ .$$

En outre, les notations sont celles de Love.

Il s'agit de déterminer les fonctions régulières et *uniformes* $X_x , \ldots , u , v$ satisfaisant au système précédent dans une certaine aire S (base de cylindre), à condition que le contour de S *ne soit soumis à aucune tension.*

Le flux de chaleur étant permanent, on aura

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0\ ;$$

donc, la fonction T est harmonique dans S. Désignons par $\psi(z)$ la fonction de la variable complexe $z = x + iy$ dont la partie réelle est égale à $T(x , y)$ et posons

$$P(x , y) + i\,Q(x , y) = \int^z \psi(z)\, dz\,.$$

Posons ensuite

$$(3)\qquad u = u' + \frac{\beta P}{2(\lambda + \mu)}\ ,\quad v = v' + \frac{\beta Q}{2(\lambda + \mu)},$$

u' et v' désignant deux fonctions nouvelles. Remplaçons dans (2) u et v par ces valeurs. Il vient

$$(4)\qquad X_x = \lambda\Delta' + 2\mu\frac{\partial u'}{\partial x}\ ,\ Y_y = \lambda\Delta' + 2\mu\frac{\partial v'}{\partial x}\ ,\ X_y = \mu\left(\frac{\partial u'}{\partial y} + \frac{\partial v'}{\partial x}\right);$$

donc, *les fonctions* X_x , Y_y , X_y , u , v *satisfont aux mêmes équations que si le corps avait une température uniforme* $(T = 0)$, u' , v' jouant le rôle des composantes des déplacements.

En résumé, *les tensions* X_x , Y_y , X_y *sont précisément les mêmes que si le corps, sans être échauffé, était soumis aux distorsions.*

[En particulier, si l'aire S est simplement connexe, on aura $X_x = Y_y = X_y = 0$].

Il est aisé de calculer les caractéristiques de ces distorsions fictives qui, en ce qui concerne les composantes X_x, Y_y, X_y, produisent le même effet que l'échauffement.

En effet, les composantes u et v du déplacement réel étant, par hypothèse, uniformes, les formules (3) montrent que la polydromie des fonctions u', v' provient uniquement de la polydromie des fonctions P et Q, lesquelles doivent être supposées connues, car la température T est donnée.

Entre autres il est bien facile de s'assurer directement que le caractère de polydromie des fonctions P et Q est précisement celui qui doit être d'après la théorie générale des distorsions.

Les caractéristiques des distorsions fictives une fois déterminées, le problème de l'équilibre du corps inégalement échauffé revient au problème fondamental des distorsions, problème qui consiste à déterminer l'état de l'équilibre, étant données les caractéristiques de chaque coupure.

Il est presque inutile de signaler que dans le cas envisagé de déformation plane il y aura *trois* constantes pour chaque coupure et non six, comme dans le cas général (à savoir, d'après votre terminologie, seulement les distorsions d'ordres 1, 2 et 6 ont lieu).

Le cas le plus simple est celui d'un *anneau circulaire*. Supposons qu'on donne les suites des valeurs que la température doit prendre tout le long des deux circonférences limites. Dans ce cas on peut déterminer T sous la forme de la série

$$T = k \log r + \sum_{-\infty}^{+\infty} r^n (a_n \cos n\vartheta + b_n \sin n\vartheta),$$

ϱ et ϑ désignant les coordonnées polaires, d'où l'on tire

$$P + iQ = kz \log z + (a_{-1} - i b_{-1}) \log z + \text{fonct. uniforme.}$$

Donc, en désignant par P_+, P_-, Q_+, Q_- les valeurs de P et Q sur les deux bords d'une coupure quelconque, on aura

$$P_+ - P_- = 2\pi (b_{-1} - ky),$$
$$Q_+ - Q_- = 2\pi (a_{-1} + kx).$$

D'après les formules (3) on obtiendra les caractéristiques des distorsions fictives; à savoir, si l'on met

$$u'_+ - u'_- = a - ry \quad , \quad v'_+ - v'_- = b + rx$$

on aura

$$a = -\frac{\pi\beta}{\lambda+\mu} b_{-1} \;,\; b = -\frac{\pi\beta}{\lambda+\mu} a_{-1} \;,\; r = -\frac{\pi\beta}{\lambda+\mu} k.$$

Les coefficients a_{-1}, b_{-1}, k se calculent d'après une méthode bien connue; il est à remarquer que ces grandeurs dépendent seulement des valeurs des intégrales

$$\int T\, d\vartheta \,, \quad \int T \cos\vartheta\, d\vartheta \,, \quad \int T \sin\vartheta\, d\vartheta \,,$$

prises le long de l'une ou de l'autre des circonférences limites, en sorte que si l'on modifie la valeur de température sur les bords sans modifier les valeurs des intégrales précédentes, les tensions X_x, Y_y, X_y restent les mêmes.

Si on prend, par exemple, $T = T_0 = \text{const.}$ sur une circonférence et $T = T_1 = \text{const.}$ sur l'autre, on obtient, en appliquant vos formules pour les distorsions d'un cylindre creux circulaire la formule connue de Föpple.

Dans mon article cité je considère quelques autres exemple et en particulier je donne la solution du problème des distorsions pour le cas où l'aire S est formée par le plan entier avec un trou de forme elliptique. Or, on peut considérablement simplifier la solution, en appliquant les formules, données dans mon livre: *Applications des intégrales analogues à celles de Cauchy*, etc. (1). D'une façon générale on obtiendra immédiatement la solution du problème des distorsions pour les domaines S, considérés dans le livre cité (Ch. IV), si l'on supprime la condition d'uniformité des déplacements.

Fisica. — *Sulle modalità dell'assorbimento dei coloranti del trifenilmetano* (2). Nota del dott. E. Adinolfi, presentata dal Socio M. Cantone.

La doppia velocità di diffusione riscontrata nelle soluzioni delle sostanze coloranti del trifenilmetano (3), fa supporre che i vibratori che originano le bande di assorbimento nello spettro visibile siano due. Le seguenti osservazioni confermano tale ipotesi:

1. Dalla tabella contenuta nella precedente Nota si rileva che i due massimi di assorbimento si presentano diversamente spostati nei varî solventi. Così che mentre per la cianina, il verde malachite, l'azofuxina, il verde metile, il rosa di bengala e l'eosina, il massimo di lunghezza d'onda maggiore subisce spostamenti maggiori dell'altro, l'inverso accade per il bleu vittoria, la fuxina, la rosanilina, la pararosanilina e il violetto metile.

(1) Tiflis, édit. de l'Université. 1922.

(2) Lavoro eseguito nell'Istituto di fisica della R. Università di Napoli.

(3) Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, vol. XXXI, serie 5ª, 1° sem., fasc. II, giugno 1922.