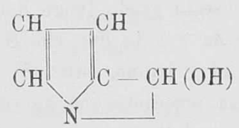
Queste anomalie avevano più tardi richiamata l'attenzione di Emilio Fischer [1]; egli infatti, senza conoscere i miei lavori, aveva detto che « nell'aldeide α-carbopirrolica si può ammettere una relazione fra gruppo aldeidico ed immidico che le attuali formole non prendono in considerazione ». Io non ho mancato di richiamare l'attenzione dell'eminente chimico tedesco sul fatto che prima di lui io aveva espresso lo stesso concetto, ed in data 18 ottobre 1913 egli mi rispose che non aveva pubblicata nessuna nuova formola per le pirrolaldeidi, per quanto avesse pensato molto allo schema:



e che d'altra parte egli aveva presa conoscenza incompleta del mio lavoro perchè nel Chem. Zentralblatt non sono riportate le formole da me prese in considerazione.

Geometria. — *Sui complessi covarianti di tre complessi lineari a due a due in involuzione.* Nota IV del Corrispondente Luigi Berzolari [2].

15. Accenniamo ad altre proprietà che si hanno in relazione con complessi di natura più generale dei precedenti.

Data una retta r di coordinate p_{ik}, le due generatrici di S' ad essa appoggiate si ottengono sostituendo nelle equazioni (4) d'una tale generatrice, al posto di λ, le radici dell'equazione quadratica (12). Se dunque tra questa e la (6) si elimina λ, l'equazione risultante, cui può darsi la forma

$$9(K_2^2 + K_3^2)^2 \varrho^2 + 6(K_2^2 - K_3^2)(K + K_1^2)\varrho + 4KK_1^2 + (K_2^2 - K_3^2)^2 = 0,$$

sarà soddisfatta dai valori di ϱ che, in virtù della (6), spettano ai due gruppi di J determinati dalle due anzidette generatrici di S'.

Chiamando α il birapporto di tali due gruppi e dei due gruppi equianarmonici di J, si avrà

$$(\alpha - 1)^2 \Omega^2 - 12(\alpha + 1)^2 K K_1^2 K_2^2 K_3^2 = 0. \tag{18}$$

Quest'equazione rappresenta dunque il complesso di ottavo grado, luogo delle rette r tali che i due gruppi di J cui appartengono le generatrici

(1) Berichte, *46* (1913), 2510.

(2) Presentata nella seduta del 18 giugno 1922.

di S′ appoggiate ad r formano il birapporto α con i due gruppi equianarmonici della stessa J.

Per $\alpha = -1$ si ottiene Ω, com'era da prevedere, perchè due gruppi di J separati armonicamente dai due gruppi equianarmonici sono tra loro apolari [1].

Analogamente, per la (10), l'equazione

$$(\alpha+1)^2 \mathrm{K}\Theta - 9(\alpha-1)^2 \mathrm{K}_1^2 \mathrm{K}_2^2 \mathrm{K}_3^2 = 0 \tag{19}$$

rappresenta il complesso di sesto grado luogo delle rette r tali che le due generatrici di S′ incontrate da r e le due che S′ ha in comune con la quadrica corrispondente (n. 3) ad r hanno, entro S′, il birapporto α.

Per $\alpha = 1$ si ottiene la proprietà che ha servito nel n. 6 a definire Θ.

Dalla (18) per $\alpha = 1$ e dalla (19) per $\alpha = -1$ risultano, per l'insieme dei complessi $\mathrm{K}_1, \mathrm{K}_2, \mathrm{K}_3$, proprietà, che non istiamo ad enunciare.

Ponendo sia $\alpha = 2$ e sia $\alpha = \frac{1}{2}$, la (19), in virtù dell'identità (17), diviene

$$(\mathrm{K}_2^2 + \mathrm{K}_3^2)(\mathrm{K}_3^2 + \mathrm{K}_1^2)(\mathrm{K}_1^2 + \mathrm{K}_2^2) = 0.$$

Perciò tutte e sole le rette che incontrano una delle sei rette $d_i\, d'_i$ hanno la proprietà che le due generatrici di S′ appoggiate ad una tal retta r e le due poste nella quadrica corrispondente ad r formano un gruppo armonico, ma in guisa da essere coniugate una della prima coppia e una della seconda.

Le seconde polari della coppia di generatrici di S′ incontranti una retta r, rispetto alle due quaterne equianarmoniche di J, son date dalle equazioni

$$(\pm\sqrt{3}\,p_{31} + i p_{24})\lambda^2 - 2i(p_{12} - p_{34})\lambda + i p_{31} \pm \sqrt{3}\,p_{24} = 0,$$

in cui bisogna prendere i segni superiori o gl'inferiori. Le rette r, tali che quelle seconde polari abbiano il birapporto α, formano il complesso di quarto grado

$$4\alpha(\mathrm{K}_1^4 + \mathrm{K}_2^4 + \mathrm{K}_3^4) - (3\alpha^2 - 2\alpha + 3)\Theta = 0.$$

Si ottiene così *una definizione geometrica dei singoli complessi del fascio determinato da* Θ *e* Ω (considerato ai n.i 13 e 14).

Per $\alpha = 1$, da una delle identità (14) risulta *un nuovo significato geometrico dei complessi quadratici* K′ *e* K″.

[1] Cfr. la mia Nota II: *Intorno alla rappresentazione delle forme binarie cubiche e biquadratiche sulla cubica gobba*, Rend. del Circolo Mat. di Palermo, vol. 5 (1891), pag. 33 (n. 17).

Le seconde polari della coppia di generatrici di S' poste sulla quadrica corrispondente ad una retta r, rispetto alle due quaterne equianarmoniche di J, sono date da

$$(p_{12}-p_{34})(i p_{31} \pm \sqrt{3}\, p_{24})\lambda^2 + 2i(p_{31}^2 - p_{24}^2)\lambda + (p_{12}-p_{34})(\pm\sqrt{3}\, p_{31} - i p_{24}) = 0$$

prendendo i segni superiori o gl'inferiori. Perciò l'equazione

$$4\alpha\Theta^2 - 3(\alpha+1)^2 \mathrm{K}\,\mathrm{K}_1^2\,\mathrm{K}_2^2\,\mathrm{K}_3^2 = 0$$

rappresenta il complesso di ottavo grado delle rette, per le quali le due dette seconde polari hanno il birapporto α.

Per $\alpha = -1$:

Il complesso Θ è il luogo delle rette r tali che, se si considerano le due generatrici di S' situate sulla quadrica corrispondente ad una retta r, e di esse, entro S', le seconde polari rispetto ai due gruppi equianarmonici dell'involuzione J, le due coppie di generatrici di S' così risultanti si separano armonicamente.

16. Consideriamo un qualsiasi complesso covariante della terna K_1, K_2, K_3. Il suo cono avente per vertice un punto y è covariante dell'angolo tetraedro che ha per facce i piani focali di y rispetto ai complessi lineari $L_1, \ldots, L_4$ (n. 7). Se ne deduce [1]:

L'equazione di ogni complesso covariante della terna di complessi lineari a due a due in involuzione rappresentati dalle (1) *si ottiene (salvo un eventuale fattore $K_1 K_2 K_3$) eguagliando a zero una forma simmetrica dei quadrati delle espressioni K_1, K_2, K_3 contenute nelle stesse* (1).

Perciò *tutti i complessi covarianti di una siffatta terna (astraendo dall'eventuale presenza della terna stessa) sono di grado pari.*

Una facile discussione conduce inoltre alle proprietà:

I complessi (1) *hanno un solo complesso covariante di secondo grado, ed è quello delle tangenti alla quadrica* Q.

Essi hanno una sola coppia covariante di complessi quadratici, cioè la coppia K', K''.

I complessi covarianti del quarto grado costituiscono un fascio, al quale appartengono Θ ed Ω, la coppia dei complessi quadratici K', K'', *la quaterna dei complessi lineari $L_1, \ldots, L_4$, e il complesso delle tangenti a* Q *contato due volte. Per ciascuno di essi il cono avente il vertice in un punto generico ha per piani bitangenti i piani focali del punto rispetto ad $L_1, \ldots, L_4$, con le stesse generatrici di contatto, che sono pure generatrici del cono circoscritto dal punto alla quadrica* Q.

[1] Cfr. Ciani, *Contributo alla teoria del gruppo di 168 collineazioni piane*, Ann. di Matem., Serie III, vol. 5 (1900), pag. 33 (n. 12).

17. Posto per brevità

$$K_1^2 = u \ , \ K_2^2 = v \ , \ K_3^2 = w \ ,$$

sia

$$f(u, v, w) = 0 \tag{20}$$

l'equazione di un complesso covariante della terna (1), cosicchè, se f è una forma ternaria simmetrica d'ordine n in u, v, w, il complesso sarà del grado $2n$. Le rette singolari del complesso si hanno associando alla (20) l'equazione

$$u\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2 + v\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2 + w\left(\frac{\partial f}{\partial w}\right)^2 = 0 \ ,$$

e siccome questa è simmetrica in u, v, w e di grado $4n - 2$ nelle coordinate, così:

La congruenza delle rette singolari di un complesso di grado $2n$ covariante della terna (1) *si scompone in* $4n(2n-1)$ *congruenze lineari. Le direttrici di queste congruenze appartengono tutte al regolo* S′ (*ma non, in generale, al complesso considerato*), *e vi formano* $2n(2n-1)$ *gruppi* (*distinti o no*) *dell'involuzione* J.

È poi evidente che:

Le generatrici del regolo S *sono $2n$-ple per il complesso, in quanto il cono del complesso avente per vertice un punto generico di* Q *consta di $2n$ piani passanti per la generatrice di* S *che esce dal punto.*

18. Per il num. prec., non si può parlare di superficie singolare di un complesso covariante della terna (1), a meno che non si voglia dar questo nome alla quadrica Q, contata un certo numero di volte.

Più in generale, la terna (1) non possiede altra superficie covariante che Q; anzi la proprietà sussiste, e può dimostrarsi in modo assai semplice, indipendentemente dall'ipotesi che i tre dati complessi siano a due a due in involuzione. In altri termini:

Tre complessi lineari qualunque non hanno altra superficie covariante che la quadrica cui appartiene il loro regolo comune.

Infatti siano S questo regolo, S′ il regolo ad esso incidente, contenente le direttrici delle tre congruenze lineari che i dati complessi hanno a due a due in comune, Q la quadrica su cui S ed S′ sono tracciati. Tra le omografie che mutano in sè ciascuno dei dati complessi, vi sono le ∞^3 che tengono fisse le rette di S′, poichè ognuna di esse, tenendo fissi i complessi speciali della rete determinata dai dati complessi, tien fissi tutti i complessi della rete. Queste ∞^3 omografie formano un gruppo G_3, e non sono altro che le omografie biassiali aventi gli assi nel regolo S.

Ciò premesso, una superficie F, che sia covariante dei tre dati complessi, sarà mutata in sè dal G_3, quindi ogni suo punto sarà unito per almeno ∞^1 omografie del G_3 stesso, di conseguenza per omografie diverse dall'identità. Ma le omografie biassiali considerate, diverse dall'identità, hanno tutti i loro punti uniti su Q, dunque ogni punto di F appartiene a Q.

Avvertenza. — Nella 1ª di queste Note del prof. BERZOLARI (pag. 421 del vol. precedente di questi Rendiconti) a causa di una svista nell'impaginazione, il brano che comincia alla riga 9ª della pag. 422, con le formule (8) che termina con la riga 13ª di pag. 423, deve essere invece inserito dopo la 4ª riga di pag. 424.

NOTE PRESENTATE DA SOCI

Teoria dei Numeri. — *Sopra la teoria delle forme aritmetiche.* Nota I del dott. MARIO BEDARIDA, presentata dal Corrispondente GUIDO FUBINI [1].

1. Nella presente Nota ci proponiamo di stabilire una relazione tra il numero dei generi in cui si ripartiscono le classi di forme di Dirichlet, (forme binarie quadratiche a coefficienti e variabili interi algebrici) nel corpo $K(\sqrt{-1})$, ed a determinante intero razionale D, ed il numero dei generi in cui si ripartiscono le classi di forme di Gauss (forme binarie quadratiche a coefficienti e variabili interi ordinari) aventi il medesimo determinante [2].

Tale relazione, ci permetterà di enunciare un teorema sopra il numero delle classi ancipiti (ambigue), ossia sopra le classi di forme aritmetiche a periodo 2.

Inoltre, partendo da alcuni risultati di Dirichlet, intorno al numero delle classi di forme aritmetiche, nel corpo $K(\sqrt{-1})$, a determinante razionale [3], determineremo un'espressione del numero delle classi di forme di Gauss, da cui si potrà dedurre un teorema sopra il numero delle classi duplicate, cioè sopra le classi di forme aritmetiche che sono il quadrato di altre

[1] Presentata nella seduta del 18 giugno 1922.

[2] Per la teoria dei generi delle forme di Dirichlet, cfr. la mia Nota: *Il genere nelle forme aritmetiche di Dirichlet, secondo un teorema di Eisenstein.* Rend. Ist. Lomb. Serie II, vol. LIV, fasc. VI-X (1921) pag. 204 e seg.

[3] Cfr. la mia Nota: *Sopra due teoremi di Dirichlet.* Annali di Mat., T. XXXI, serie III (1922), pag. 121 e segg.