ATTI
DELLA
REALE ACCADEMIA NAZIONALE
DEI LINCEI

ANNO CCCXIX.
1922

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXXI.

2° SEMESTRE.

ROMA
TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1922

Dalle esperienze eseguite, risulta accertato che KBF_4 e $KMnO_4$ possono dare cristalli misti, del tipo del fluoborato, i quali contengono, operando nelle mie condizioni sperimentali, tutt'al più 0.4% $KMnO_4$. La miscibilità allo stato solido è, perciò, assai piccola. Dal lato del permanganato potassico la miscibilità, poi, è praticamente nulla.

Le nuove ricerche dimostrano che ben a ragione avevo sostenuto nel 1905 che le somiglianze cristallografiche da me accertate tra i fluoborati ed i perclorati e permanganati alcalini non erano accidentali: ora possiamo affermare che si tratta di vero e proprio isomorfismo, per quanto ridotto ad un grado assai limitato, come dimostra la scarsissima miscibilità allo stato solido, che si verifica, per giunta, soltanto dalla parte del fluoborato di potassio.

In un prossimo lavoro riferirò intorno ai risultati ottenuti col fluoborato ed il perclorato di potassio, come pure con questi composti, il permanganato potassico ed il solfato di bario.

NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sugli spazi curvi.* Nota di C. BURALI-FORTI, presentata dal Socio R. MARCOLONGO [1].

Dò alcune formule per gli spazi curvi ad n dimensioni, riferendomi a cose già note [2].

1. Indichiamo con λ_m, per $m \geqq 2$, la speciale $\mathbf{H}_m$ [cfr. (^{e}), n. 5] definita, ponendo:

$$\lambda_m = \beta^{-1}\,(d^{m-1}\,\beta/d\,\mathrm{P}^{m-1})\,, \tag{1}$$

avendo $\mathrm{P}\,,\beta$ il significato già noto [cfr. (^{a})], e per la quale vale la formula notevole:

$$d\lambda_m = \lambda_{m+1}\,d\mathrm{P} - \lambda_2\,d\mathrm{P}\,.\,\lambda_m\,. \tag{2}$$

Infatti. Da $\beta\beta^{-1} = 1$ si ha, differenziando e tenendo conto della (1) per $m = 2$,

$$d\beta^{-1} = -\,\beta^{-1}\,(d\beta/d\mathrm{P})\,d\mathrm{P}\,.\,\beta^{-1} = -\,\lambda_2\,d\mathrm{P}\,.\,\beta^{-1}\,,$$

(1) Pervenuta all'Accademia il 23 giugno 1922.

(2) Citerò i lavori seguenti che indicherò con (^{a}), (^{b}), ... (^{e}).

T. Boggio, (^{a}) *Geometria assoluta degli spazi curvi*. Nota I. [Rend. Lincei, vol. XXVIII (1919), pp. 58-62]. — (^{b}) *Idem*. Nota II. (pp. 169-174) — (^{c}) *Sulla geometria assoluta degli spazi curvi*. [Atti Acc. Torino, vol. LIV, (1918), pp. 186-200].

C. Burali-Forti, (^{d}), *Sugli operatori differenziali omografici*. [Rend. Lincei, vol. XXV (1916), pp. 51-59]. — (^{e}) *Operatori per le iperomografie*. [Atti Acc. Torino, vol. LVII (1922), pp. 285-292).

e quindi, differenziando la (1), e per la (1) stessa,

$$d\lambda_m = \beta^{-1}\,(d^m\beta/d\mathrm{P}^m)\,d\mathrm{P} + d\beta^{-1}\,(d^{m-1}\beta/d\mathrm{P}^{m-1}) = \lambda_{m+1}d\mathrm{P} - \lambda_2\,d\mathrm{P}\cdot\lambda_m\,.$$

Se introduciamo l'operatore binario $\mathcal{H}$, che sarà poi indispensabile anche in altre questioni, ponendo:

$$\text{(3)} \qquad \mathcal{H}(\mu_u\,,\mu_v)\,\mathbf{a} = \mu_u\,\mathbf{a}\,.\,\mu_v\,, \qquad u \geqq 2\;;\; v \geqq 1\,,$$

ove μ_u è una $\mathbf{H}_u$ [cfr. (^{e}), n. 5], μ_v una $\mathbf{H}_v$; a un vettore arbitrario, risultando $\mathcal{H}(\mu_u\,,\mu_v)$ una $\mathbf{H}_{u+v-1}$ (1), allora alla (2) può darsi la forma

$$\text{(4)} \qquad d\lambda_m/d\mathrm{P} = \lambda_{m+1} - \mathcal{H}(\lambda_2\,,\lambda_m)\,.$$

Si ha pure la formula importante

$$\text{(5)} \qquad \left\{\begin{array}{l} d(\alpha\,\lambda_m) = \alpha\,\lambda_{m+1}d\mathrm{P} + \mathrm{K}\,\lambda_2\,d\mathrm{P}\,.\,\alpha\,\lambda_m\,, \quad \text{ovvero} \\ d(\alpha\,\lambda_m)/d\mathrm{P} = \alpha\,\lambda_{m+1} + \mathcal{H}(\mathrm{K}\,\lambda_2\,,\alpha\,\lambda_m)\,. \end{array}\right.$$

Infatti. Ricordando [cfr. (^{a}), p. 59] che $\alpha = \mathrm{K}\beta\,.\,\beta$, che dalla (1) si ha $d\beta = \beta\lambda_2 d\mathrm{P}$, e scrivendo, brevemente, $\beta^{(m)}$ al posto di $d^m\beta/d\mathrm{P}^m$; si ha, dalla (1),

$$\begin{aligned} d(\alpha\lambda_m) &= d(\mathrm{K}\beta\,.\,\beta\,.\,\beta^{-1}\,.\,\beta^{(m-1)}) = d(\mathrm{K}\beta\,.\,\beta^{(m-1)}) = \mathrm{K}\beta\,.\,\beta^{(m)}\,d\mathrm{P}\, + \\ &+ \mathrm{K}(\beta\lambda_2 d\mathrm{P})\,\beta^{(m-1)} = \alpha\lambda_{m+1}\,d\mathrm{P} + \mathrm{K}\lambda_2 d\mathrm{P}\,.\,\mathrm{K}\beta\,.\,\beta\lambda_m = \alpha\lambda_{m+1}\,d\mathrm{P}\, + \\ &+ \mathrm{K}\lambda_2 d\mathrm{P}\,.\,\alpha\lambda_m\,, \quad \text{c. d. d.} \end{aligned}$$

Si ha pure in modo ovvio dalla (1)

$$\text{(6)} \qquad d(\beta\lambda_m)/d\mathrm{P} = \beta\lambda_{m+1} = d^m\beta/d\mathrm{P}^m\,;$$

nè bisogna trascurare la formula [cfr. (^{e}) per k applicato ad una $\mathbf{H}_m$]

$$\text{(7)} \qquad \mathrm{k}\lambda_m = \lambda_m$$

che risulta da (1) perchè $\mathrm{k}(\mu_1\,.\,\mu_v) = \mu_1\,.\,\mathrm{k}\,\mu_v$, ed inoltre [cfr. (^{e}), n. 4] $\mathrm{k}\beta^{(1)} = \beta^{(1)}$, da cui, successivamente, $\mathrm{k}\beta^{(m)} = \beta^{(m)}$.

(1) La (3) non concorda con la (25) di (^{e}) a p. 291; ma risulta più opportuna la attuale (3), del resto coucorde con la (25) nel caso particolare $u = 2$, $v = 1$. La (25) di (^{e}) è caso particolare della $\mathcal{H}_r(\mu_u\,,\mu_v)$, che è pure una $\mathbf{H}_{u+v-1}$, che definiamo ponendo:

$$\mathcal{H}_r(\mu_u\,,\mu_v)\,\mathbf{a}_1 \ldots \mathbf{a}_r = \mu_u\,\mathbf{a}_1 \ldots \mathbf{a}_r\,.\,\mu_v\,,\; u \geqq 2\,,\; r \geqq 1\,,\; r < u\,.$$

Con la λ_2 si esprime la Φ di Boggio:

$$\Phi_P(\alpha, \mathbf{a}) = \lambda_2 \mathbf{a} \qquad [\text{cfr. } (^a), \text{ p. } 59, (5)] \tag{8}$$

e quindi λ_2 può chiamarsi *iperomografia* ($\mathbf{H}_2$) di Christoffel, poichè i simboli omonimi, a tre indici, si esprimono mediante $\alpha\lambda_2$ e λ_2 [cfr. (^{b}), p. 173].

2. La λ_3 dà la Θ di Boggio [cfr. (^{a}), p. 61, (10)]

$$\Theta_P(\alpha, \mathbf{a}, \mathbf{b}) = \lambda_3 \mathbf{ba} - \lambda_3 \mathbf{ab}. \tag{9}$$

Infatti. Si ha dalla (4):

$$\lambda_3 \mathbf{ba} = \frac{d(\lambda_2 \mathbf{a})}{dP} \mathbf{b} + \lambda_2 \mathbf{b} \,.\, \lambda_2 \mathbf{a} \quad , \quad \lambda_3 \mathbf{ab} = \frac{d\lambda_2 \mathbf{b})}{dP} \mathbf{a} + \lambda_2 \mathbf{a} \,.\, \lambda_2 \mathbf{b} \,;$$

sottraendo, dalla definizione di Θ si ha la (9).

Si può dare alla (9) un'altra forma introducendo l'operatore $k^\star$, tra $\mathbf{H}_u$ e $\mathbf{H}_u$ per $u \gtreqless 2$:

$$(k^\star \mu_u)\, \mathbf{ab} = \mu_u\, \mathbf{ba} \quad , \quad \text{con } \mathbf{a}, \mathbf{b} \text{ vettori arbitrari.} \tag{10}$$

Allora la (9) diviene subito

$$\Theta_P(\alpha, \mathbf{a}, \mathbf{b}) = (k^\star - 1)\, \lambda_3 \mathbf{ab}, \tag{11}$$

e quindi la $(k^\star - 1)\lambda_3$ può chiamarsi la $\mathbf{H}_3$ di Riemann perchè per i simboli omonimi a quattro indici, si ha [cfr. (^{b}), p. 173]

$$\left\{ \begin{aligned} &\{\mathbf{ab}, \mathbf{cd}\} = \mathbf{b} \times \Theta_P(\alpha, \mathbf{c}, \mathbf{d})\, \mathbf{a} = \mathbf{b} \times (k^\star - 1)\, \lambda_3 \mathbf{cda}, \\ &(\mathbf{ab}, \mathbf{cd}) = \mathbf{b} \times \alpha\, \Theta_P(\alpha, \mathbf{c}, \mathbf{d})\, \mathbf{a} = \mathbf{b} \times (k^\star - 1)\, \alpha\lambda_3 \mathbf{cda} \;(^1). \end{aligned} \right. \tag{12}$$

Giova qui indicare una notevole proprietà della Θ, e quindi di $(k^\star - 1)\lambda_3$, non ancora nota:

$$\left\{ \begin{aligned} &I_1 [\alpha^m\, \Theta_P(\alpha, \mathbf{a}, \mathbf{b})] = 0, \qquad \text{ovvero per la (11)} \\ &I_1 (k^\star - 1)\, \alpha^m \lambda_3 = 0, \qquad \text{per } m \text{ intero relativo.} \end{aligned} \right. \tag{13}$$

Infatti. Da (12) si ha subito $(\mathbf{ab}, \mathbf{cd}) = -(\mathbf{ab}, \mathbf{dc})$; si ha pure [cfr. (^{c}), p. 195, (23')] $(\mathbf{ab}, \mathbf{cd}) = (\mathbf{cd}, \mathbf{ab})$; dunque $(\mathbf{uu}, \mathbf{cd}) = 0$ che, per (12), vale anche per $\mathbf{u}$ vettore funzione di P. Si avrà dunque:

$$\alpha^{m-1}\, \mathbf{i} \times \alpha\, \Theta_P(\alpha, \mathbf{a}, \mathbf{b})\, \alpha^{m-1}\, \mathbf{i} = \mathbf{i} \times \alpha^m\, \Theta_P(\alpha, \mathbf{a}, \mathbf{b})\, \alpha^{m-1}\, \mathbf{i} = 0\,;$$

(1) Poichè si ha dalla (10), $k^\star(\mu_u \,.\, \mu_v) = \mu_u \,.\, k^\star \mu_v$, $u \gtreqless 1$, $v \gtreqless 2$.

presi come vettori $\mathbf{i}$ quelli *uniti* della dilatazione α si ha che $\alpha^{m-1}\mathbf{i}$ è parallelo ad $\mathbf{i}$ e quindi

$$\mathbf{i} \times \alpha^m \Theta_P(\alpha, \mathbf{a}, \mathbf{b})\, \mathbf{i} = 0$$

che sommate per tutti gli $\mathbf{i}$, formanti sistema ortogonale, dà appunto la prima (13) (1).

3. Consideriamo la trasformazione dello spazio rappresentativo P in quello P′ [cfr. (^{b}), p. 170] e indichiamo con λ'_m, per P′, le $\mathbf{H}_m$ indicato con λ_m per P. Si ha intanto:

$$\text{(14)} \quad \begin{cases} \lambda'_2 = \sigma^{-1} \{ d\sigma/dP + \mathrm{k}(\lambda_2\sigma) \} \sigma \\ \lambda_2 = \sigma \{ d\sigma^{-1}/dP' + \mathrm{k}(\lambda'_2 \sigma^{-1}) \} \sigma^{-1} . \end{cases}$$

Infatti. Per il $d\sigma$ [cfr. (^{b}), p. 171, (5)], tenendo presente la (8), si ha [cfr. (^{e}), p. 286]:

$$d\sigma = \sigma\lambda'_2\, dP' - \lambda_2\, dP \,.\, \sigma = \sigma\lambda'_2\sigma^{-1}\, dP - \mathrm{k}(\lambda_2\sigma)\, dP$$

da cui risulta subito la prima (14); analogamente per la seconda.

Per la λ'_3 si ha:

$$\text{(15)} \quad \begin{cases} (\mathrm{k}^\star - 1)\, \lambda'_3 = \sigma^{-1} \,.\, \mathcal{H}' \{ (\mathrm{k}^\star - 1)\, \lambda_3, \sigma, \sigma \} \,.\, \sigma \\ (\mathrm{k}^\star - 1)\, \lambda_3 = \sigma \,.\, \mathcal{H}' \{ (\mathrm{k}^\star - 1)\, \lambda'_3, \sigma^{-1}, \sigma^{-1} \} \,.\, \sigma^{-1} \text{ (2)} \end{cases}$$

Infatti. È noto [cfr. (^{b}), p. 171, (6); (^{c}), p. 192, (16)] che

$$\Theta_P(\alpha', \mathbf{a}, \mathbf{b}) = \sigma^{-1} \,.\, \Theta_P(\alpha, \sigma\mathbf{a}, \sigma\mathbf{b}) \,.\, \sigma ,$$

da cui, per la (11),

$$(\mathrm{k}^\star - 1)\, \lambda'_3\, \mathbf{abc} = \sigma^{-1} \{ (\mathrm{k}^\star - 1)\, \lambda_3 \,.\, \sigma\mathbf{a} \,.\, \sigma\mathbf{b} \,.\, \sigma\mathbf{c} \} =$$
$$\sigma^{-1} \,.\, \mathcal{H}' \{ (\mathrm{k}^\star - 1)\, \lambda_3 \,.\, \sigma, \sigma, \sigma \}\, \mathbf{abc} = \sigma^{-1}\, \mathcal{H}' \{ (\mathrm{k}^\star - 1)\, \lambda_3, \sigma, \sigma \} \,.\, \sigma\mathbf{a} \,.\, \mathbf{bc} ,$$

da cui, per l'arbitrarietà di $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, risulta la prima delle (15). La seconda in modo analogo; oppure dalla prima approfittando [cfr. (^{e}), p. 292, (28)] di una nota proprietà della $\mathcal{H}'$.

(1) Per $m = 1$ si ha la (13) operando con I_1 nella (17′) di (^{c}), p. 193.

(2) La $\mathcal{H}'$, per $u \geqq 2$ e $v < u$, resta definita così:

$$\mathcal{H}'(\mu_u, \xi_1, \dots, \xi_v)\, \mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_{u-v}\, \mathbf{b}_1 \dots \mathbf{b}_v = \mu_u\, \mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_{u-v} \,.\, \xi_1 \mathbf{b}_1 \dots \xi_v \mathbf{b}_v$$

e faremo anche uso della notazione abbreviata

$$\mathcal{H}'(\mu_u, \xi^{(v)})$$

in luogo di $\mathcal{H}'(\mu_u, \xi, \dots, \xi)$, quando le v *omografie* $\xi_1, \dots, \xi_v$ coincidono con una unica *omografia* ξ. La $\mathcal{H}'$ ora definita coincide con la $\mathcal{H}$ di (^{e}) p. 292 e quindi valgono le proprietà indicate in (^{e}). In altro lavoro daremo assetto definitivo a notazioni che si sono venute trasformando secondo i bisogni degli argomenti studiati.