ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

ANNO CCCXIX.

1922

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXXI.

2° SEMESTRE.

ROMA
TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1922

Matematica. — *Alcuni teoremi sulle equazioni algebriche.* Nota di LUIGI FANTAPPIÈ, presentata dal Socio L. BIANCHI [1].

Colle teorie di Galois sulle equazioni algebriche, e fondamentalmente colla considerazione del gruppo di Galois di un'equazione, viene data una classificazione completa ed esauriente dei varî tipi d'irrazionalità che occorre introdurre per risolvere le equazioni stesse. Così la risolubilità per radicali si traduce nella proprietà del gruppo di Galois di avere per fattori di composizione solo numeri primi, l'irriducibilità dell'equazione nella transitività del gruppo, ecc.

Restava però una lacuna quando si trattava di sapere se, quali e quante radici di una data equazione erano esprimibili razionalmente l'una per l'altra; e questa lacuna credo di aver colmata coi teoremi che seguono, e che io ho trovati prima incidentalmente per il campo razionale durante la composizione della mia tesi di laurea: « *Le forme decomponibili coordinate alle classi di ideali nei corpi algebrici* ». A questo lavoro anzi, che sarà pubblicato negli Annali della R. Scuola Normale Superiore di Pisa, rimando per maggiori schiarimenti su questi teoremi.

Sia dunque;

$$F(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_{n-1} x + a_n = 0 \tag{1}$$

un'equazione algebrica di grado n, irriducibile in un dato campo di razionalità R, contenente i coefficienti dell'equazione stessa; e siano $\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_n$ le sue n radici, certamente diverse.

È noto allora che se una radice ϑ_r della (1) si esprimerà razionalmente in R per un'altra radice ϑ_i, anche ϑ_i si esprimerà razionalmente in R per ϑ_r, ed esprimeremo questo fatto scrivendo $\vartheta_r \backsim \vartheta_i$; per la relazione espressa dal segno $\backsim$ vale dunque la proprietà simmetrica; non solo, ma vale anche la proprietà transitiva, poichè se è $\vartheta_r \backsim \vartheta_s$, e $\vartheta_s \backsim \vartheta_t$ (cioè ϑ_r esprimibile razionalmente in R per ϑ_s, e ϑ_s esprimibile razionalmente in R per ϑ_t) sarà anche evidentemente $\vartheta_r \backsim \vartheta_t$.

Potremo allora distribuire le n radici ϑ della (1) in un certo numero h di gruppi, ognuno dei quali contenga ***tutte e sole*** quelle radici che sono

[1] Pervenuta all'Accademia il 13 luglio 1922.

esprimibili razionalmente per un'altra qualsiasi del gruppo stesso, e per comodità indicheremo ora le ϑ con due indici, il primo indicante il gruppo a cui la radice stessa appartiene, il secondo per distinguere la radice fra quelle dello stesso gruppo. Siano dunque

$$\left\{\begin{array}{l} \vartheta_{11} \backsim \vartheta_{12} \backsim \cdots\cdot \backsim \vartheta_{1,\nu_1} \\ \vartheta_{21} \backsim \vartheta_{22} \backsim \cdots\cdot \backsim \vartheta_{2,\nu_2} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \vartheta_{h,1} \backsim \vartheta_{h,2} \backsim \cdots\cdot \backsim \vartheta_{h,\nu_h} \end{array}\right.$$

$$\nu_1 + \nu_2 + \cdots\cdot + \nu_h = n$$

le n radici della (1). Sarà $\vartheta_{ir} \backsim \vartheta_{is}$ cioè

$$\vartheta_{ir} = q(\vartheta_{is}) \tag{3}$$

ove q indica una conveniente funzione razionale con coefficienti appartenenti a R. Se nell'equazione (3) eseguiamo ora una qualsiasi sostituzione g sulle ϑ del gruppo di Galois per l'equazione (1), l'equazione stessa, per un noto teorema [1], sarà ancora verificata; e si avrà quindi, indicando con ϑ'_{ir} e ϑ'_{is} le lettere in cui g porta ϑ_{ir} e ϑ_{is} rispettivamente,

$$\vartheta'_{ir} = q(\vartheta'_{is})$$

cioè sarà anche $\vartheta'_{ir} \backsim \vartheta'_{is}$. Si ha dunque la notevole proprietà che una qualsiasi sostituzione g del gruppo di Galois porta due lettere di una stessa orizzontale del quadro (2) ancora in due lettere di una medesima orizzontale; cioè

TEOREMA 1° — *Il gruppo di Galois per l'equazione* (1), *quando esista qualche* $\nu_i > 1$ *e* $< n$ [*cioè la* (1) *non sia normale ma qualche sua radice si possa esprimere razionalmente per un'altra*], *è imprimitivo, e le h orizzontali del quadro* (2) *costituiscono precisamente i varî sistemi d'imprimitività.*

Sarà quindi

$$\nu_1 = \nu_2 = \cdots = \nu_h = \nu$$

cioè

TEOREMA 2° — *Le n radici dell'equazione* (1) *si distribuiscono in h gruppi (con h divisore di n, essendo* $n = h\nu$*) ognuno contenente un egual numero* ν*, pure divisore di n, di radici esprimibili razionalmente l'una per l'altra.*

Dal teorema 1° segue [2] il

(1) Cfr. L. Bianchi, *Lezioni sulla teoria dei gruppi di sostituzioni e delle equazioni algebriche secondo Galois*, Pisa, Spoerri, 1900, § 62, pag 144.

(2) Bianchi. Op. cit., § 71, pag. 161.

Teorema 3° — *L'equazione* (1), *a gruppo imprimitivo, si potrà considerare ottenuta mediante l'eliminazione di* y *da due altre equazioni*

$$\varphi(y) = y^h + c_1 y^{h-1} + \cdots + c_{h-1} y + c_h = 0 \tag{4}$$

$$x^\nu + \delta_1(y) x^{\nu-1} + \cdots + \delta_{\nu-1}(y) x + \delta_\nu(y) = 0 \tag{5}$$

una di grado h *eguale al numero dei gruppi, con coefficienti* c_r $(r = 1, 2, \ldots h)$ *appartenenti a* R; *e un'altra di grado* ν *con coefficienti funzioni razionali in* R *di* y, *che darà, per ogni radice* y_i *della* (4), *le* ν *radici di un medesimo sistema d'imprimitività* $\vartheta_{i1}, \vartheta_{i2}, \ldots \vartheta_{i\nu}$.

Essendo poi queste quantità esprimibili razionalmente l'una per l'altra, *queste equazioni* (5) *risulteranno sempre normali.*

Se in particolare il grado dell'equazione irriducibile è un numero primo p, potranno darsi solo due casi, e cioè o l'equazione è normale $(\nu = p)$, o nessuna delle sue radici è esprimibile razionalmente per un altra $(\nu = 1)$; quindi

Teorema 4° — *Se una radice di un' equazione irriducibile di grado primo* p *è esprimibile razionalmente per un'altra, l'equazione stessa è risolubile per radicali, anzi si risolve estraendo un'unica radice d'indice* p.

Infatti l'equazione sarà normale, il suo gruppo di Galois sarà perciò d'ordine p eguale al suo grado, e quindi ciclico essendo p un numero primo.

Teorema 5° — *Se il gruppo di Galois di un'equazione irriducibile* (1) *ha transitività multipla, nessuna delle radici dell'equazione può esprimersi razionalmente per un'altra.*

Se infatti fosse $\vartheta_r \backsim \vartheta_s$, cioè

$$\vartheta_r = q(\vartheta_s)$$

si potrebbero portare, con una sostituzione g del gruppo di Galois, le due lettere ϑ_r e ϑ_s in due altre arbitrarie ϑ'_r e ϑ'_s per cui sarebbe ancora

$$\vartheta'_r = q(\vartheta'_s)$$

e ponendo $\vartheta'_s = \vartheta_s$, ϑ'_r ancora arbitraria, si avrebbe

$$\vartheta'_r = q(\vartheta_s) = \vartheta_r$$

cioè tutte la radici risulterebbero eguali, il che è assurdo, data l' irriducibilità dell'equazione (1).

Se quindi il gruppo di Galois di un'equazione è il gruppo totale $G_{n!}$, che è il caso più generale, nessuna delle radici è esprimibile razionalmente per un'altra, avendo il gruppo transitività multipla. In questo caso $h = n$, $\nu = 1$; l'altro caso estremo $h = 1$, $\nu = n$ si ha quando l'equazione è normale, cioè tutte le radici sono esprimibili razionalmente l'una per l'altra.