ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE

DEI LINCEI

ANNO CCCXIX.

1922

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXXI.

2° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1922

Geometria. — *Area, lunghezza e curvatura di una figura qualunque.* Nota di Ugo Cassina, presentata dal Socio C. Somigliana [1].

È ben noto come il concetto di *volume* d'un *solido*, o di *area* di una *figura piana*, o di *lunghezza* d'una *figura rettilinea* si possa stabilire fondandosi solamente sull'idea di *limite superiore od inferiore* d'una classe di quantità numeriche.

Più complessi sono invece i concetti di *area* d'una *superficie curva*, e di *lunghezza* d'una *linea*: Per stabilire questi, col dovuto rigore, è indispensabile ricorrere all'idea di *limite d'una funzione*.

Svariate definizioni sono state proposte di tali due ultimi enti; e molte e molto note sono le pubblicazioni dell'ultimo cinquantennio su questo argomento [2].

Io voglio ora richiamare l'attenzione degli studiosi su un modo nuovo di introdurre i concetti di area, di lunghezza ed — insieme ad essi — anche il concetto di curvatura integrale di una figura:

Ho trovato che è possibile attribuire a tali enti una *origine unica* fondandosi sulla considerazione del volume della figura costituita dai punti che hanno dalla figura presa in esame distanza minore od eguale ad una distanza prefissata in modo conveniente.

Questo procedimento ha il vantaggio di permettere una generalizzazione di tali concetti, per cui essi possono essere stabiliti per una *figura qualunque*. In particolare si arriva così al concetto di *lunghezza di un campo a tre dimensioni*, finora mai considerato.

Per lo studio del solido generico è indispensabile ricorrere ad una formola di Steiner la quale dà il volume del solido compreso fra due superficie parallele.

Nella presente Nota, darò le nuove definizioni di area, lunghezza e curvatura valevoli per qualunque figura ed una nuova dimostrazione di tale teorema di Steiner; infine accennerò ad alcuni dei risultati a cui sono pervenuto applicando le mie definizioni alle figure più elementari, al corpo convesso ed al solido generico [3].

Farò uso solo dell'algoritmo classico.

[1] Pervenuta all'Accademia il 4 luglio 1922.

[2] Si cfr., per es., F. Sibirani, *Sulla definizione di area d'una superficie.* (Period. di matem., vol. XXI; a. 1906, p. 32).

[3] V. U. Cassina, *Volume, area, lunghezza e curvatura di una figura.* (Atti della R. Accad. delle Scienze di Torino, vol. LVII, 1922).

1. Sia u un *solido*, o una *superficie*, o una *linea* od un insieme qualunque di punti (ordinari), cioè una *figura*. La figura u sia *finita*, cioè: le distanze di due punti arbitrari di u abbiano limite superiore finito. Sia h un numero reale assoluto (o distanza). Allora con « $\mathrm{sol}\,(u, h)$ » indicherò il solido formato dai punti la cui distanza da u è minore od eguale ad h.

La considerazione del « $\mathrm{sol}(u, h)$ », che è fondamentale per la mia ricerca geometrica, si presenta naturalmente anche in altre questioni non geometriche.

Per es.: imaginiamo che u sia una *figura luminosa* immersa in un mezzo *isotropo* (superficie d'onda). Allora la luce che parte dai punti di u in un certo istante t_0, dopo un certo tempo t, si trova sul contorno delle sfere di egual raggio (funzione del tempo e del mezzo) contenute nello spazio in cui si propaga la luce ed i cui centri sono i punti di u. E se indichiamo con h il raggio di tali sfere, allora la luce che parte da u, dopo il tempo t, si trova sul contorno del $\mathrm{sol}\,(u, h)$, e precisamente su quella parte del contorno che appartiene allo spazio in cui si propaga la luce.

Orbene, per una stessa figura u il volume di $\mathrm{sol}\,(u, h)$ è una funzione di h la quale, nei casi più comuni, è intera di 3° grado in h, cioè è della forma:

$$\mathrm{Volum\ sol}\,(u, h) = A + Bh + Ch^2 + Dh^3, \tag{1}$$

in cui D, se la figura u esiste, è indubbiamente differente da zero. Da semplici considerazioni di omogeneità risulta che le grandezze A, B, C, D che figurano in (1) sono rispettivamente un *volume*, un'*area*, una *lunghezza* ed un *numero astratto*; e, se il campo di variabilità per h è stato convenientemente scelto, le grandezze A, B, C, D non variano al variare di h: cioè sono funzioni di u e non di h. Se poi u è una superficie, allora la quantità numerica D non differisce essenzialmente dalla curvatura integra, considerata da Gauss, della superficie stessa.

Per questi motivi, chiamerò *area*, *lunghezza* e *curvatura* della figura u, e li indicherò rispettivamente con « $\mathrm{Ar}\, u$ », « $\mathrm{Lon}\, u$ » e « $\mathrm{Curv}\, u$ », gli enti così definiti:

$$\mathrm{Ar}\ \ u = \lim_{h \to 0} [\mathrm{Volum\ sol}(u, h) - \mathrm{Volum}\, u] / (2h), \tag{2}$$

$$\mathrm{Lon}\, u = \lim_{h \to 0} [\mathrm{Volum\ sol}\,(u, h) - \mathrm{Volum}\, u - 2h\, \mathrm{Ar}\, u]/(\pi h^2), \tag{3}$$

$$\mathrm{Curv}\, u = \lim_{h \to 0} [\mathrm{Volum sol}\,(u, h) - \mathrm{Volum}\, u - 2h \mathrm{Ar}\, u - \pi h^2 \,\mathrm{Lon}\, u] / (4/3\, \pi h^3). \tag{4}$$

Risulta poi:

$$\mathrm{Volum}\, u = \lim_{h \to 0} \mathrm{Volum\, sol}\,(u, h); \text{ quindi:} \tag{5}$$

« Se è possibile fissare il campo di variabilità per h in modo che valga la (1), allora il coefficiente di h^0 dà il *volume* di u, quello di $2h$ l'*area*, quello di πh^2 la *lunghezza* ed infine quello di $4/3\,\pi h^3$ la *curvatura* ».

Nei casi ordinari le definizioni qui date coincidono evidentemente con quelle proposte da tutti gli altri autori.

2. Ciò premesso vengo alla dimostrazione della formola di Steiner [1] a cui accennavo dianzi. Tale formola serve a calcolare il *volume del solido compreso fra due superficie parallele.*

Lo Steiner la ricava partendo dalla considerazione di superficie poliedriche parallele; io ne darò qui un'altra dimostrazione semplice e generale.

Sia:

$$z = f(x, y),$$

in cui f ammette le derivate parziali di tutti gli ordini che occorreranno, l'equazione d'una superficie σ. Una superficie siffatta la dirò talvolta *regolare*. Siano X, Y, Z i coseni direttori della normale nel punto (x, y, z) di σ, ed h un numero reale assoluto; allora indico con σ' la superficie parallela a σ descritta dal punto di coordinate x', y', z' tali che:

$$x' = x + hX; \qquad y' = y + hY; \qquad z' = z + hZ.$$

Con X'_x, X'_y, X'_z, ecc. indicherò rispettivamente le derivate parziali di X rispetto ad x, ad y, a z, ecc.; e con $d\sigma$ e $d\sigma'$ gli elementi d'area nei punti corrispondenti (x, y, z) ed (x', y', z'). Allora, per il noto teorema sulla trasformazione degli integrali multipli (Lagrange a. 1773), se ai volumi ed alle aree si dà un segno:

$$\frac{d\sigma'}{d\sigma} = \frac{d(x', y', z')}{d(x, y, z)} = \begin{vmatrix} 1 + hX'_x, & hX'_y, & 0 \\ hY'_x, & 1 + hY'_y, & 0 \\ hZ'_x, & hZ'_y, & 1 \end{vmatrix} =$$
$$= 1 + h(X'_x + Y'_y) + h^2(X'_x Y'_y - X'_y Y'_x).$$

Ma se con H ed K si indicano rispettivamente la *curvatura media* e la *curvatura totale* di σ, si ha:

$$H = X'_x + Y'_y \quad \text{e} \quad K = X'_x Y'_y - X'_y Y'_x;$$

quindi:

(6) $$d\sigma' = (1 + hH + h^2 K)\, d\sigma.$$

Dalla (6) integrando si deduce che il volume V del solido compreso fra le due superficie σ e σ' è dato da:

[1] J. Steiner, *Über die parallele Flächen* (a. 1840) (*Gesam. Werke*, 2 Bd., pp. 174-176).

(7) $$V = h\int d\sigma + h^2/2\int H\,d\sigma + h^3/3\int K\,d\sigma,$$

che è la formola di Steiner [1].

Una formola analoga alla precedente, si ha per il calcolo dell'area compresa fra due linee parallele piane.

Se si indicano con ds e ds' gli elementi d'arco in due punti corrispondenti su due linee parallele piane L ed L' alla distanza h, e con ϱ il raggio di curvatura di L, si ha:

(8) $$ds' = ds\,(1 + h/\varrho);$$

e quindi l'area S compresa fra le due linee parallele è data da:

(9) $$S = h\int ds + h^2/2\int ds/\varrho\ \text{[2]}.$$

In un'altra Nota calcolerò il volume compreso fra due superficie parallele con punti *singolari* (*spigoli, vertici*, ecc.) ed applicherò il risultato alla determinazione della lunghezza d'un solido con punti singolari; qui, invece, enuncerò soltanto alcune proprietà che sono conseguenze immediate delle mie definizioni e del teorema di Steiner.

Sia τ il solido racchiuso dalla superficie σ considerata dianzi, solido che distinguerò con il qualificativo di *regolare*. Allora:

Il solido regolare τ ha: area eguale alla metà dell'area del suo contorno; lunghezza eguale a $1/(2\pi)$ moltiplicato per l'integrale, esteso a

[1] Tale formola nei trattati di Geometria differenziale si dimostra — notoriamente — con lunghi calcoli fondandosi sulle relazioni fra le grandezze fondamentali di 1° e di 2° ordine.

[2] Ai concetti di *lunghezza* e di *curvatura* d'una *linea piana* si può giungere anche rifacendo nel piano delle considerazioni analoghe a quelle fatte nello spazio per giungere alle definizioni generali date nel n. 1.

Infatti: Sia a un piano contenente la figura finita u; allora se si indica con «$\mathrm{sup}_a(u, h)$» la figura costituita dai punti di a la cui distanza da u è minore od eguale ad h, facendo il calcolo materiale, si verifica che:

$$\mathrm{Ar}\ \ u = \lim_{h \to 0} \mathrm{Area}\,\mathrm{sup}_a(u, h),$$

$$\mathrm{Lon}\ u = \lim_{h \to 0} [\mathrm{Area}\,\mathrm{sup}_a(u, h) - \mathrm{Ar}\,u\,]/(2h),$$

$$\mathrm{Curv}\ u = \lim_{h \to 0} [\mathrm{Area}\,\mathrm{sup}_a(u, h) - \mathrm{Ar}\,u - 2h\,\mathrm{Lon}\,u]/(\pi h^2),$$

ove il simbolo «Area» ha nel piano significato analogo a quello del simbolo «Volum» già usato nello spazio.

In modo analogo ed ovvio si possono estendere le definizioni del n. 1 alle figure o campi ad n dimensioni. Per una tale figura, avrà quindi senso parlare di curvatura-integrale, lunghezza, area, volume, ecc.

tutta la superficie che lo limita, della curvatura media del suo contorno; curvatura eguale a $1/(4\pi)$ *moltiplicato per l'integrale, esteso a tutta la superficie che lo limita, della curvatura totale del suo contorno.* Cioè:

$$\mathrm{Ar}\,\tau = 1/2 \int d\sigma \; ; \; \mathrm{Lon}\,\tau = 1/(2\pi) \int H d\sigma \; ; \; \mathrm{Curv}\,\tau = 1/(4\pi) \int K\, d\sigma \, .$$

Ogni superficie regolare chiusa ha lunghezza nulla, ed area e curvatura doppie di quelle del solido da essa racchiuso.

Per altri teoremi relativi ai solidi *multiplamente connessi*; ed al calcolo delle aree, lunghezze e curvature della *sfera, parallelipipedo rettangolo, cilindro circolare retto, cono circolare retto, poliedro convesso, prisma, poligono convesso, segmento, corona circolare, superficie sferica, superficie laterale d'un cilindro circolare retto, toro solido, superficie d'un parallelepipedo rettangolo,* rimando alla mia Nota già citata.

Come es., riporterò la seguente proposizione:

Per una sfera solida, l'area è eguale ad un mezzo dell'area del suo contorno; la lunghezza è eguale a quattro volte quella del suo raggio; la curvatura è eguale ad 1.

Inoltre osservo che il procedimento ivi seguito è forse suscettibile di essere introdotto nella Scuola Media per il calcolo delle aree delle superficie curve: infatti si giunge a tali enti senza ricorrere al concetto di limite e facendo uso soltanto delle formole che danno i volumi dei solidi della geometria elementare.

3. Terminerò accennando ad alcuni risultati, che credo nuovi, ottenuti applicando le mie definizioni al corpo convesso. Ho dimostrato che:

La curvatura d'una figura convessa è sempre eguale ad 1;

ed ho trovato un notevole legame tra l'area del corpo convesso e quella della sua proiezione su un piano arbitrario, e tra la lunghezza del corpo convesso e quella della sua proiezione su un piano o su una retta arbitraria.

Precisamente ho dimostrato che:

L'area d'una figura convessa è eguale a $1/(2\pi)$ *moltiplicato per l'integrale sferico dell'area della proiezione della figura su un piano arbitrario;*

La lunghezza d'una figura convessa è eguale a $1/\pi^2$ *moltiplicato per l'integrale sferico della lunghezza della proiezione della figura su un piano arbitrario; od: è eguale a* $1/(2\pi)$ *moltiplicato per l'integrale sferico della lunghezza della proiezione della figura su una retta arbitraria.*

Il concetto di *integrale sferico* è introdotto così:

Siano φ e θ rispettivamente la longitudine e la colatitudine d'un punto d'una superficie sferica di centro un punto arbitrario O e di raggio unitario, e sia $f(\varphi, \theta)$ una funzione numerica di φ e di θ definita per ogni punto di tale superficie; allora all'integrale:

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} f(\varphi\,,\theta) \sin\theta\, d\theta$$

ho dato il nome di integrale sferico di f.

Quindi se u è un figura *convessa* ed r è il diametro di detta sfera passante per il punto di coordinate $(\varphi\ \theta)$, e con « Proj $(u\,, r)$ » e « Proj $(u\,, \mathrm{I}r)$ » si indicano le figure costituite dalle proiezioni ortogonali dei punti di u rispettivamente sulla retta r o sul piano diametrale perpendicolare ad r, i teoremi precedenti in formole si scrivono così:

$$\text{(10)}\qquad \mathrm{Ar}\ u = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \text{Area Proj}\,(u\,, \mathrm{I}r) \sin\theta\, d\theta\,,$$

$$\text{(11)}\qquad \mathrm{Lon}\ u = \frac{1}{\pi^2}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \text{Lon Proj}\,(u\,, \mathrm{I}r) \sin\theta\, d\theta =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \text{Lon Proj}\,(u\,, r) \sin\theta\, d\theta\,.$$

Si tenga presente che qui le aree e le lunghezze delle proiezioni si considerano in valore assoluto.

Per le dimostrazioni di tali teoremi rimando ai numeri 3, 4 della Nota citata.

Soltanto osservo che in esse ho fatto uso di alcune relazioni che legano l'area, la lunghezza e la curvatura del solido « sol $(u\,, h)$ » rispettivamente con la derivata rispetto ad h del volume, dell'area e della lunghezza dello stesso solido.

Precisamente, nelle ipotesi del n° 1, si deduce:

$$\text{(12)}\qquad \mathrm{Ar}\ \ \mathrm{sol}\,(u\,, h) = 1/2\ \mathrm{D}\ \mathrm{Volum}\ \mathrm{sol}\,(u\,, h)\,,$$

$$\text{(13)}\qquad \mathrm{Lon}\ \mathrm{sol}\,(u\,, h) = 1/\pi\ \mathrm{D}\ \mathrm{Ar}\ \mathrm{sol}\,(u\,, h)\,,$$

$$\text{(14)}\qquad \mathrm{Curv}\,\mathrm{sol}\,(u\,, h) = 1/4\ \mathrm{D}\ \mathrm{Lon}\ \mathrm{sol}\,(u\,, h)\,,$$

ove D indica la derivazione rispetto ad h [1].

[1] O. Chisini, in un lavoro pubblicato dopo la presentazione di questa Nota all'Accademia, (*Le proprietà di massimo dei poligoni e dei poliedri circoscrittibili, del cerchio e della sfera*; Period. di matem., serie IV, vol. II, n. 4, p. 353) approfitta del nuovo concetto di *lunghezza di un solido*, ed enuncia le seguenti eleganti proposizioni:

« Fra i poliedri di cui è data la lunghezza e la giacitura delle faccie quello di superficie massima è un poliedro circoscrittibile » ;

« Fra i solidi convessi di data lunghezza la sfera ha area massima ».

(*Aggiunta alle bozze di stampa*).