ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

ANNO CCCXIX.

1922

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXXI.

2° SEMESTRE.

BIBLIOTHECA LYNCEORUM

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1922

Geometria. — *Sul parallelismo di Levi-Civita.* Nota di G. VITALI, presentata dal Corrispondente GINO LORIA [1].

Nella presente nota mi riferisco alla nozione di parallelismo introdotta dal Prof. Levi-Civita [2] e mi domando:

Dato uno spazio S_n *ad n dimensioni, esistono in esso degli spazi ad n-1 dimensioni in cui il parallelismo lungo una loro curva qualsiasi coincide col parallelismo in* S_n *lungo la stessa curva?*

Sia S_{n-1} uno di tali spazi e Γ una sua geodetica. Le tangenti a Γ sono parallele lungo Γ in S_{n-1} [3]; perchè lo siano anche in S_n occorre che Γ sia geodetica di S_n [4]. Dunque *perchè un* S_{n-1} *soddisfi alle condizioni richieste è necessario che tutte le geodetiche in* S_{n-1} *siano geodetiche in* S_n o in altri termini *occorre che esso sia uno spazio geodetico in* S_n [5].

Io dico che *questa condizione è anche sufficiente.*

Sia

$$ds^2 = \sum_{1}^{n}{}_{rs}\, a_{rs}\, dx_r\, dx_s \tag{1}$$

il quadrato dell'elemento lineare di S_n.

Se S_n ammette uno spazio geodetico S_{n-1}, noi possiamo immaginare scelte le coordinate curvilinee in modo che questo S_{n-1} abbia l'equazione $x_n = 0$. Indichiamo con a^0_{rs} ciò che diventa a_{rs} quando in esso si pone $x_n = 0$. Il quadrato dell'elemento lineare di S_{n-1} sarà dato da

$$d\sigma^2 = \sum_{1}^{n-1}{}_{rs}\, a^0_{rs}\, dx_r\, dx_s\,. \tag{2}$$

[1] Pervenuta all'Accademia il 18 agosto 1922.

[2] T. Levi-Civita *Nozione di parallelismo in una varietà qualunque e conseguente specificazione geometrica della curvatura riemanniana.* Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, pag. 173-205.

[3] T. Levi-Civita, l. c. § 7, pag. 183-184.

[4] T. Levi-Civita. l. c. § 7, pag. 183-184.

[5] v. L. Bianchi. *Lezioni di Geometria differenziale,* 2ª edizione. Vol. 1°, cap. XIII. § 188, pag. 424.

I simboli di Christoffel di 2ª specie relativi alla forma (2) si otterranno dai corrispondenti della forma (1) quando si pone in essi $x_n = 0$ e li indicheremo con

$$\left\{ \begin{matrix} rs \\ t \end{matrix} \right\}^0 \qquad (r, s, t = 1, 2, \ldots n-1).$$

Poichè tutte le geodetiche di S_{n-1} sono geodetiche in Sn e per queste geodetiche deve essere $x_n = 0$, si avrà

$$\sum_1^{n-1}{}_{rt} \left\{ \begin{matrix} rt \\ n \end{matrix} \right\}^0 \frac{dx_r}{ds} \frac{dx_t}{ds} = 0 \,, \text{ (1)}$$

e poichè in un punto qualunque di S_{n-1} una geodetica di S_{n-1} può avere qualunque direzione, sarà

$$\left\{ \begin{matrix} rt \\ n \end{matrix} \right\}^0 = 0 \qquad (r, s = 1, 2, \ldots n-1). \tag{3}$$

Le equazioni di parallelismo in S_{n-1} lungo una sua curva C qualunque sono

$$\frac{d\xi^i}{ds} + \sum_1^{n-1}{}_{rt} \left\{ \begin{matrix} rt \\ i \end{matrix} \right\}^0 \frac{dx_r}{ds} \cdot \xi^t = 0 \text{ (2)} \qquad (i = 1, 2 \ldots n-1),$$

dove $\xi^1, \xi^2, \ldots \xi^{n-1}$ sono i parametri di direzione in S_{n-1} di un sistema di parallele in S_{n-1} lungo C. Considerando queste direzioni in S_n si ha $\xi^n = 0$, inoltre per la curva C considerata in S_n è $x_n = 0$ e $\frac{dx_n}{ds} = 0$. Per queste condizioni e per le uguaglianze (3) le $\xi^1, \xi^2, \ldots \xi^{n-1}, \xi^n = 0$ soddisfano le condizioni di parallelismo lungo C in S_n

$$\frac{d\xi^i}{ds} + \sum_1^{n}{}_{rt} \left\{ \begin{matrix} rt \\ i \end{matrix} \right\} \frac{dx_r}{ds} \xi^t = 0 \qquad (i = 1, 2 \ldots n).$$

Resta così dimostrato che *condizione necessaria e sufficiente perchè in uno spazio* S_{n-1} *di* S_n *il parallelismo lungo qualunque curva* C *di* S_{n-1} *coincida col parallelismo lungo la stessa curva* C *in* S_n *è che* S_{n-1} *sia uno spazio geodetico di* S_n.

(1) Poichè deve essere

$$\frac{d^2x_n}{ds^2} + \sum_1^{n}{}_{rt} \left\{ \begin{matrix} rt \\ n \end{matrix} \right\} \frac{dx_r}{ds} \frac{dx_t}{ds} = 0$$

v. L. Bianchi. *Lezioni di geometria differenziale*, 2ª edizione, vol. 1, § 157, pag. 339.

(2) T. Levi-Civita, l. c., pag. 179.

Da un lavoro di Schur [1] risulta che *condizione necessaria e sufficiente perchè un* S_n *abbia* ∞^n S_{n-1} *geodetici è che* S_n *sia a curvatura di Riemann costante* [2]. Noi possiamo allora concludere che *condizione necessaria e sufficiente perchè in* S_n *esistano* ∞^n S_{n-1} *in cui il parallelismo lungo qualsiasi linea coincida con quello in* S_n *è che* S_n *sia a curvatura costante.*

Astrofisica. — *Misure interferenziali sul disco del III° satellite di Giove.* Nota di MENTORE MAGGINI, presentata dal Corrispondente AZEGLIO BEMPORAD [3].

Nella primavera di quest'anno, qualche tempo dopo il mio arrivo all'Osservatorio di Catania, ho potuto far costruire, col permesso del direttore, dal tecnico signor Strano, un primo modello d'Interferometro, del tipo usato da J. A. Anderson a Mount Wilson, che applicai all'equatoriale Merz di 33 cm. di apertura e di m. 5,57 di distanza focale. La piastra che porta le due fenditure è situata a 60 cm. dal fuoco dell'obiettivo e può venire ruotata in angolo di posizione e la corrispondente rotazione si misura con apposito cerchio posto presso l'oculare.

Riserbandomi di dare a suo tempo una particolareggiata descrizione dello strumento, presento qui i risultati di un primo lavoro, da me intrapreso in vista di saggiarlo, sulla misura dell'allungamento del disco del III° satellite di Giove, *Ganimede*.

La variazione di figura dei dischi dei quattro principali satelliti venne constatata la prima volta nel 1892 da W. H. Pickering e confermata di poi da altri; le osservazioni più recenti sono quelle del Phillips, pubblicate in *Monthly Notices*, dic. 1921, il quale ha suggerito di misurare l'allungamento del disco con l'Interferometro.

Come è noto, la misura del diametro dei quattro principali satelliti di Giove costituì la prima applicazione dei metodi interferenziali all'astronomia per opera del Michelson nel 1890 e di Hamy nel 1898, ma ambedue questi autori considerarono il disco del satellite come perfettamente rotondo.

Nelle presenti osservazioni ho avuto per scopo soltanto di determinare l'allungamento di figura, senza preoccuparmi di misurare il diametro apparente ormai noto.

Dirò subito che in principio non speravo di ottenere dei buoni risultati perchè, come si sa, la superficie del III° satellite non è uniformemente lu-

(1) F. Schur, *Ueber den Zusammenhang der Raüme costanten Riemannschen Krümmungmaasse mit den proiectiven Raümen.* Math. Annalen Bd. 27, anno 1886, pag. 537 e seguenti.

(2) Di questa proposizione pubblicherò fra breve una dimostrazione.

(3) Pervenuta all'Accademia il 16 agosto 1922.