ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

ANNO CCCXIX.

1922

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXXI.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1922

Meccanica. — *Sul principio di equivalenza in relatività.* Nota di Enrico Persico, presentata dal Socio T. Levi-Civita [1].

Si consideri la varietà spazio-tempo riferita a due diversi sistemi di coordinate x_0, x_1, x_2, x_3, e y_0, y_1, y_2, y_3, i quali abbiano, in un assegnato punto P le seguenti proprietà:

1. La linea coordinata x_0 sia tangente alla linea coordinata y_0, cioè, indicando con una sopralineatura (come faremo sempre) il valore di una quantità nel punto P,

$$\overline{\frac{\partial y_r}{\partial x_0}} = 0; \qquad (r = 1, 2, 3)$$

2. Lo spazio $x_0 = \text{cost.}$ sia tangente in P allo spazio $y_0 = \text{cost.}$, cioè

$$\overline{\frac{\partial y_0}{\partial x_r}} = 0; \qquad (r = 1, 2, 3)$$

3. Sulle linee x_0 e y_0 i parametri stessi (ai quali attribuiremo il significato di tempo) siano presi in modo, che

$$\overline{\frac{\partial y_0}{\partial x_0}} = 1 .$$

Vogliamo vedere in che relazione sta la gravità relativa al sistema x, con quella relativa al sistema y, considerate entrambe nel punto-istante P. Notiamo che per l'ipotesi 1. i due sistemi di riferimento spaziali x_1, x_2, x_3 e y_1, y_2, y_3 sono, in P, momentaneamente e localmente in quiete l'uno rispetto all'altro.

La gravità X nel sistema x è, per definizione [2], uguale all'accelerazione di un punto materiale libero, in quiete: le sue componenti X^r, rife-

[1] Pervenuta all'Accademia il 4 luglio 1922.

[2] Cfr. T. Levi Civita, *ds^2 einsteiniani in campi newtoniani*. Rend. Acc. Lincei, vol. XXVI (1917, 2° sem.), pag. 310.

rite al sistema x_1, x_2, x_3 (per il che le distingueremo con l'indice x) si ricaveranno perciò dalle equazioni delle geodetiche, ponendovi

$$\ddot{x}^r = \frac{1}{g_{00}} \mathrm{X}^r_x \ ; \ \dot{x}^i = 0 \ ; \ \dot{x}^0 = \frac{1}{\sqrt{g_{00}}} \qquad (i, r = 1, 2, 3)$$

(dove g_{00} è, naturalmente, il coefficiente di dx_0^2 nella forma fondamentale ds^2, e il punto indica derivazione rispetto a s); sarà quindi, con particolare riferimento al punto P

$$\text{(1)} \qquad \overline{\mathrm{X}}^r_x = -\left\{\overline{\begin{matrix} 00 \\ r \end{matrix}}\right\}_x \qquad (r = 1, 2, 3)$$

Analogamente, la gravità esistente nel sistema y, riferita alle coordinate y_1, y_2, y_3, sarà, in P

$$\text{(1')} \qquad \overline{\mathrm{Y}}^r_y = -\left\{\overline{\begin{matrix} 00 \\ r \end{matrix}}\right\}_y \qquad (r = 1, 2, 3)$$

Per confrontare questi due vettori, vogliamo riferirli allo stesso sistema di coordinate, p. es., y_1, y_2, y_3; il che è possibile, perchè il vettore $\overline{\mathrm{X}}$, che appartiene allo spazio $x_0 = \text{cost.}$, apparterrà, in virtù dell'ipotesi 2., anche allo spazio $y_0 = \text{cost.}$, onde potremo riferire anch'esso al sistema y_1, y_2, y_3: le sue componenti controvarianti relative a questo sistema, saranno denotate con $\mathrm{X}^1_y, \mathrm{X}^2_y, \mathrm{X}^3_y$.

Esse sono, in virtù della controvarianza, e della (1)

$$\overline{\mathrm{X}}^r_y = \sum_{0}^{3}{}_s \overline{\mathrm{X}}^s_x \frac{\partial y_r}{\partial x_s} = -\sum{}_s \left\{\overline{\begin{matrix} 00 \\ s \end{matrix}}\right\}_x \overline{\frac{\partial y_r}{\partial x_s}}$$

e per una nota formula di Christoffel

$$\text{(2)} \qquad \overline{\mathrm{X}}^r_y = -\overline{\frac{\partial^2 y_r}{\partial x_0^2}} - \sum_{0}^{3}{}_{jk} \left\{\overline{\begin{matrix} jk \\ r \end{matrix}}\right\}_y \overline{\frac{\partial y_j}{\partial x_0}}\,\overline{\frac{\partial y_k}{\partial x_0}} =$$

$$= -\overline{\frac{\partial^2 y_r}{\partial x_0^2}} - \left\{\overline{\begin{matrix} 00 \\ r \end{matrix}}\right\}_y =$$

$$= -\overline{\frac{\partial^2 y_r}{\partial x_0^2}} + \overline{\mathrm{Y}}^r_y .$$

Vediamo il significato del 1° termine.

Un punto, in quiete rispetto al sistema x, si muove, in generale, rispetto a y: se esso però si considera nel punto-istante P, la sua velocità rispetto a y è nulla, e la sua accelerazione rispetto a y ha le componenti

$$A_y^r = \frac{d^2 y_r}{d y_0^2}.$$

Questo vettore A si può chiamare (con una ovvia estensione di denominazioni abituali) *accelerazione del sistema x rispetto al sistema y, in* P.

Calcoliamola esplicitamente:

$$dy_r = \frac{\partial y_r}{\partial x_0} d x_0 \qquad dy_0 = \frac{\partial y_0}{\partial x_0} d x_0$$

quindi

$$\frac{d y_r}{d y_0} = \frac{\partial y_r}{\partial x_0} : \frac{\partial y_0}{\partial x_0}.$$

Differenziamo ancora

$$d \frac{d y_r}{d y_0} = \frac{1}{\left(\frac{\partial y_r}{\partial x_0}\right)^2} \left[\frac{\partial^2 y_r}{\partial x_0^2} \frac{\partial y_0}{\partial x_0} - \frac{\partial y_r}{\partial x_0} \frac{\partial^2 y_0}{\partial x_0^2}\right] dx_0$$

e quindi

$$\frac{d^2 y_r}{d y_0^2} = \frac{1}{\left(\frac{\partial y_0}{\partial x_0}\right)^3} \left[\frac{\partial^2 y_r}{\partial x_0^2} \frac{\partial y_0}{\partial x_0} - \frac{\partial y_r}{\partial x_0} \frac{\partial^2 y_0}{\partial x_0^2}\right],$$

Introducendo per le derivate i particolari valori che esse hanno in P, abbiamo

$$A^r = \overline{\frac{d^2 y_r}{d y_0^2}} = \overline{\frac{\partial^2 y_r}{\partial x_0^2}}.$$

La (2) si può dunque scrivere

$$\overline{X}_y^r = \overline{Y}_y^r - A_y^r$$

ossia, vettorialmente

(3) $$\overline{X} = \overline{Y} - A.$$

Se il sistema y, in particolare, è localmente geodetico in P, allora $\overline{Y} = 0$, e quindi

(3′) $$\overline{Y} = -A$$

È ovvio il significato fisico di queste formule: esse esprimono, in forma più *precisa* e più *generale*, il noto principio, secondo cui un osservatore, chiuso in una gabbia animata da moto uniformemente accelerato, non può distinguere gli effetti di questo moto da quelli di un campo gravitazionale uniforme e costante.