Ciò premesso, una superficie F, che sia covariante dei tre dati complessi, sarà mutata in sè dal G_3, quindi ogni suo punto sarà unito per almeno ∞^1 omografie del G_3 stesso, di conseguenza per omografie diverse dall'identità. Ma le omografie biassiali considerate, diverse dall'identità, hanno tutti i loro punti uniti su Q, dunque ogni punto di F appartiene a Q.

Avvertenza. — Nella 1ª di queste Note del prof. Berzolari (pag. 421 del vol. precedente di questi Rendiconti) a causa di una svista nell'impaginazione, il brano che comincia alla riga 9ª della pag. 422, con le formule (8) che termina con la riga 13ª di pag. 423, deve essere invece inserito dopo la 4ª riga di pag. 424.

NOTE PRESENTATE DA SOCI

Teoria dei Numeri. — *Sopra la teoria delle forme aritmetiche.* Nota I del dott. Mario Bedarida, presentata dal Corrispondente Guido Fubini [1].

1. Nella presente Nota ci proponiamo di stabilire una relazione tra il numero dei generi in cui si ripartiscono le classi di forme di Dirichlet, (forme binarie quadratiche a coefficienti e variabili interi algebrici) nel corpo $K(\sqrt{-1})$, ed a determinante intero razionale D, ed il numero dei generi in cui si ripartiscono le classi di forme di Gauss (forme binarie quadratiche a coefficienti e variabili interi ordinari) aventi il medesimo determinante [2].

Tale relazione, ci permetterà di enunciare un teorema sopra il numero delle classi ancipiti (ambigue), ossia sopra le classi di forme aritmetiche a periodo 2.

Inoltre, partendo da alcuni risultati di Dirichlet, intorno al numero delle classi di forme aritmetiche, nel corpo $K(\sqrt{-1})$, a determinante razionale [3], determineremo un'espressione del numero delle classi di forme di Gauss, da cui si potrà dedurre un teorema sopra il numero delle classi duplicate, cioè sopra le classi di forme aritmetiche che sono il quadrato di altre

[1] Presentata nella seduta del 18 giugno 1922.

[2] Per la teoria dei generi delle forme di Dirichlet, cfr. la mia Nota: *Il genere nelle forme aritmetiche di Dirichlet, secondo un teorema di Eisenstein.* Rend. Ist. Lomb. Serie II, vol. LIV, fasc. VI-X (1921) pag. 204 e seg.

[3] Cfr. la mia Nota: *Sopra due teoremi di Dirichlet.* Annali di Mat., T. XXXI, serie III (1922), pag. 121 e segg.

classi: questo teorema, come si vedrà, ha molta simiglianza con quello di Dirichlet, che racchiude i risultati a cui noi alludiamo [1].

2. Sia: P il prodotto degli r fattori primi, razionali, dispari, distinti di D, che sono $\equiv 3$ (mod. 4); Q il prodotto degli s fattori primi, razionali, dispari, distinti di D, che sono $\equiv 1$ (mod. 4); μ la massima potenza di 2 ivi contenuta. Nel caso di $s = 0$, si porrà $Q = 1$. Indichiamo con g il numero dei generi in cui si ripartiscono le classi di forme di Dirichlet a determinante D, con g' il numero analogo per le classi di forme di Gauss aventi lo stesso determinante e con g'' il numero analogo per le classi di forme di Gauss a determinante $2^{\mu+1}\,Q$.

Ciò posto, abbiamo [2]:

per	$D \equiv 1$ (mod. 4)	è	$g = 2^{r+2s}$,	$g' = 2^{r+s-1}$,	$g'' = 2^s$
"	$D \equiv 3$ (mod. 4)	"	$g = 2^{r+2s}$,	$g' = 2^{r+s}$,	$g'' = 2^s$
"	$D \equiv 0$ (mod. 8)	"	$g = 2^{r+2s+2}$,	$g' = 2^{r+s+1}$,	$g'' = 2^{s+1}$
"	$D \equiv 2$ (mod. 8)	"	$g = 2^{r+2s+1}$,	$g' = 2^{r+s}$,	$g'' = 2^s$
"	$D \equiv 4$ (mod. 8)	"	$g = 2^{r+2s+1}$,	$g' = 2^{r+s}$,	$g'' = 2^{s+1}$
"	$D \equiv 6$ (mod. 8)	"	$g = 2^{r+2s+1}$,	$g' = 2^{r+s}$,	$g'' = 2^s$.

Dall'ispezione di questi risultati, si deduce:

Il numero dei generi in cui si ripartiscono le classi di forme di Dirichlet, a determinante intero razionale D, *è uguale al prodotto del numero dei generi in cui si ripartiscono le classi di forme di Gauss a determinante* D, *per il numero analogo relativo alle classi di forme di Gauss a determinante* $2^{\mu+1}$ Q, *se* $D \equiv 3$ *(mod. 4) e* $D \equiv 0, 4$ *(mod. 8); ne è il doppio, se* $D \equiv 1$ *(mod. 4) e* $D \equiv 2, 6$ *(mod. 8): indicando* μ *la massima potenza di* 2 *che entra in* D *e* Q *il prodotto dei suoi fattori primi, razionali, dispari, diversi, che sono* $\equiv 1$ *(mod. 4).*

3. È ben noto che tanto per le forme di Gauss, quanto per le forme di Dirichlet, il numero dei generi uguaglia sempre il numero delle classi ancipiti (a periodo 2) e quindi, il teorema ora enunciato si trasforma in quest'altro:

Il numero delle classi di forme di Dirichlet a determinante intero razionale D, *ancipiti (ambigue) è uguale al prodotto del numero delle classi di forme di Gauss a determinante* D, *ancipiti, per il numero delle classi di forme di Gauss a determinante* $2^{\mu+1}$ Q, *ancipiti, se* $D \equiv 3$ *(mod. 4)*

[1] Le forme che si considerano in questa Nota sono primitive di prima specie. Quelle di Dirichlet apparterranno sempre al corpo $K(\sqrt{-1})$.

[2] I valori di g si ottengono dalla tabella inserita a pag. 212 della mia Nota cit.: *Il genere, ecc.* Infatti, ad es.: se $D \equiv 2$ (mod. 8) è pure $D \equiv 2$ [mod. $(1+i)^5$] avendosi $8 = (1+i)^6 \cdot i$; è quindi subito visibile il corrispondente valore di g. Per quelli di g' e g'', cfr. ad es.: Bachmann, *Die Arithmetik der quadratischen Formen*, p. 108 seg.

e $D \equiv 0, 4$ *(mod. 8); ne è invece il doppio se* $D \equiv 1$ *(mod. 4) e* $D \equiv 2, 6$ *(mod. 8); ove* μ *e* Q *conservano i significati dati nell'enunciato precedente.*

4. Consideriamo ora le classi di forme di Dirichlet, a determinante intero razionale D, duplicate; cioè quelle forme che sono il quadrato di altre classi.

Indicando con H il numero totale delle classi di forme di Dirichlet, con M quello delle classi duplicate e con Λ il numero dei relativi caratteri, si ha:

$$M = \frac{H}{2^{\Lambda - 1}}. \tag{1}$$

Siano h ed h_1 il numero totale delle classi di forme di Gauss, rispettivamente a determinante $+D$ e $-D$, abbiamo, per un noto teorema di Dirichlet:

$$H = 2hh_1 \quad \text{oppure} \quad H = hh_1,$$

secondo che l'equazione indeterminata $t^2 - Du^2 = -1$, ammette soluzioni intere razionali, oppure no (¹).

Tale risultato si può trasformare in quest'altro (²): se $D \equiv 3$ (mod. 4) oppure $D \equiv 0, 4, 6$ (mod. 8) si ha sempre $H = hh_1$, se $D \equiv 1$ (mod. 4) oppure $D \equiv 2$ (mod. 8), si ha $H = 2hh_1$, oppure $H = hh_1$ secondo che la equazione suddetta ammette soluzioni intere razionali oppure no.

Inoltre: se $D \equiv 1, 3$ (mod. 4) è $\Lambda = r + 2s + 1$, se $D \equiv 0$ (mod. 8) è $\Lambda = r + 2s + 3$, e se $D \equiv 2, 4, 6$ (mod. 8) è $\Lambda = r + 2s + 2$.

In conseguenza, la (1) si trasforma come segue:

$$\text{per} \quad D \equiv 1 \ (\text{mod. } 4) \quad \text{è} \quad M = \frac{hh_1}{2^{r+2s-1}} \quad \text{oppure} \quad M = \frac{hh_1}{2^{r+2s}}$$

secondo che l'equazione indeterminata $t^2 - Du^2 = -1$ ammette soluzioni intere razionali oppure no,

$$\text{per} \quad D \equiv 3 \ (\text{mod. } 4) \quad \text{è} \quad M = \frac{hh_1}{2^{r+2s}}$$

$$\text{per} \quad D \equiv 0 \ (\text{mod. } 8) \quad \text{è} \quad M = \frac{hh_1}{2^{r+2s+2}}$$

$$\text{per} \quad D \equiv 2 \ (\text{mod. } 8) \quad \text{è} \quad M = \frac{hh_1}{2^{r+2s}} \quad \text{oppure} \quad M = \frac{hh_1}{2^{r+2s+1}}$$

secondo che la suddetta equazione ha soluzioni intere razionali oppure no,

$$\text{per} \quad D \equiv 4, 6 \ (\text{mod. } 8) \quad \text{è} \quad M = \frac{hh_1}{2^{r+2s+1}}.$$

(¹) Cfr. mia Nota cit.: *Sopra due teoremi di Dirichlet.*

(²) Cfr. Enciclopédie des Sciences Math. Tom. I, vol. 3, fasc. 2, pag. 113.

Ora, se indichiamo con m_1, il numero delle classi di forme di Gauss, a determinante $-D$, duplicate, le precedenti relazioni si possono anche scrivere:

$$\text{per } D \equiv 1 \pmod{4} \text{ è } M = \frac{h}{2^{s-1}} m_1, \text{ oppure } M = \frac{h}{2^s} m_1,$$

$$\text{per } D \equiv 2 \pmod{8} \text{ è } M = \frac{h}{2^s} m_1, \text{ oppure } M = \frac{h}{2^{s+1}} m_1,$$

secondo che l'equazione indeterminata sopra scritta ammette, oppure no, soluzioni intere razionali,

$$\text{per } D \equiv 3 \pmod{4} \text{ e } D \equiv 0, 4, 6 \pmod{8} \text{ è } M = \frac{h}{2^{s+1}} m_1.$$

Inoltre, se consideriamo le classi di forme di Dirichlet, duplicate, a determinante $-D$, il loro numero è ancora M (1). Quanto precede ci offre quindi il risultato:

Indicando con h il numero totale delle classi di forme di Gauss a determinante D, con M ed m_1, i numeri delle classi di forme, rispettivamente di Dirichlet e di Gauss, a determinante $-D$, duplicate, e, con s il numero dei fattori primi, razionali, dispari, diversi di D, che sono $\equiv 1$ (mod. 4), si ha sempre:

$$h = 2^s \frac{M}{m_1} \quad \text{oppure} \quad h = 2^{s+1} \frac{M}{m_1},$$

secondo che l'equazione indeterminata $t^2 - Du^2 = -1$ ammette soluzioni intere razionali oppure no; escluso il caso $D \equiv 1$ (mod. 4), in cui si ha invece:

$$h = 2^{s-1} \frac{M}{m_1} \quad \text{oppure} \quad h = 2^s \frac{M}{m_1},$$

secondo che l'equazione suddetta ammette soluzioni intere ràzionali oppure o no.

5. Indichiamo ora con m il numero delle classi di forme di Gauss a determinante $+D$, duplicate e con λ il numero dei relativi caratteri; abbiamo:

$$m = \frac{h}{2^{\lambda-1}}, \tag{2}$$

e, se $D \equiv 1$ (mod. 4) è $\lambda = r + s$, se $D \equiv 0$ (mod. 8) è $\lambda = r + s + 2$, negli altri casi è $\lambda = r + s + 1$.

(1) Ciò si può vedere facilmente ripetendo il ragionamento fatto in nota a pag. 125 del mio lavoro citato: *Sopra due teoremi, ecc.*

Il risultato del numero precedente, tenendo conto della (2), ci conduce al teorema:

Il numero M *delle classi di forme di Dirichlet, a determinante intero razionale* D, *duplicate, è sempre legato ai numeri* m *ed* m_1 *delle classi di forme di Gauss duplicate, rispettivamente a determinante* D *e* — D, *dalle relazioni*:

$$M = 2^{r-1}\, m\, m_1 \quad \text{oppure} \quad M = 2^r\, m\, m_1\,,$$

secondo che l'equazione indeterminata $t^2 - Du^2 = -1$ *non ammette, oppure ammette, soluzioni intere razionali, escluso il caso* $D \equiv 0 \pmod{8}$ (¹), *in cui si ha invece*:

$$M = 2^r\, m\, m_1\,;$$

ove r *indica sempre il numero dei fattori primi, razionali, dispari, diversi di* D, *che sono* $\equiv 3 \pmod{4}$.

Si noti la simiglianza di questo teorema, con quello, dovuto a Dirichlet, sopra il numero totale delle classi di forme a coefficienti e variabili interi del corpo $K(\sqrt{-1})$, a determinante intero, razionale, che abbiamo considerato in principio del numero precedente.

Matematica. — *Soluzione di qualche tipo di equazione differenziale ad indice qualunque.* Nota del prof. Pio Scatizzi S. J., presentata dal Socio T. Levi-Civita (²).

Il primo cenno di tali equazioni è stato dato da Eulero (³); molto più diffusamente ne trattò Liouville (⁴), applicandole alla risoluzione di importanti problemi geometrici e fisico-matematici. Considereremo in questa Nota qualche tipo particolare, ma non privo d'interesse, che si può far dipendere dall'integrazione di equazioni differenziali ordinarie. Come è naturale, risguarderemo risoluta un'equazione funzionale che involge derivate d'ordine qualunque, quando riesca di ridurla ad ordinarie equazioni differenziali. Richiamerò anzitutto qui le formule recentemente date dalla signorina Angela Molinari (⁵) per la derivazione ad indice negativo e positivo, dovendomene

(¹) In questo caso l'equazione suddetta non ha soluzioni intere razionali.

(²) Pervenuta all'Accademia il 1° luglio 1922.

(³) Eulero, *De progressionibus trascendentibus.*

(⁴) J. Liouville, *Sur quelques questions de Géométrie et de Mécanique et sur un nouveau genre de Calcul pour résoudre ces questions.* Journal de l'Ecole Polytechnique, XXI cahier.

(⁵) A. Molinari, *Derivazione ad indice qualunque.*