ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

ANNO CCCXX

1923

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXXII.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1923

Occorre appena tornare ad osservare che le maggiori sovrapotenze necessitano per brevi tratti del viaggio e per un numero limitato di giorni all'anno: cosicchè le *percentuali annue* di maggior consumo raramente supereranno l'*uno* per cento.

Ciò fa preferire — tranne casi di climi specialmente caldi e secchi — il metodo della contropressione nel motore che non presenta complicazioni meccaniche.

NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sopra i sistemi di coordinate di una varietà qualunque*. Nota di GIUSEPPE CORBELLINI, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

In una varietà qualunque V_n siano date n congruenze di curve linearmente indipendenti fra loro e del resto arbitrarie.

Mi propongo di stabilire le condizioni necessarie e sufficienti affinchè queste congruenze possano riguardarsi come risultanti dall'intersezione di n famiglie d'∞^1 ipersuperficie, o, ciò che fa lo stesso, affinchè le n congruenze siano atte a definire un sistema di coordinate della V_n.

Riferendoci per ora ad una varietà V_n puramente analitica, cioè in corrispondenza biunivoca colle ennuple x_i (coordinate dei suoi punti), le n congruenze di linee siano assegnate mediante le equazioni differenziali:

$$\frac{dx_1}{X_i^{(1)}} = \frac{dx_2}{X_i^{(2)}} = \cdots = \frac{dx_n}{X_i^{(n)}} \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots n) \tag{1}$$

dove le $X_i^{(l)}$, definite a meno di un fattore, sono funzioni note delle x_i. Indicherò con Δ il determinante nel quale $X_i^{(l)}$ è l'elemento della linea i^{esima} e della colona l^{esima}. L'ipotesi che le n congruenze siano linearmente indipendenti equivale all'ineguaglianza:

$$\Delta \neq 0$$

da cui segue in particolare che, denominando con $\overline{X}_{il}$ l'elemento reciproco di $X_i^{(l)}$ nel determinante Δ, per un generico indice i, le $\overline{X}_{i1}, \overline{X}_{i2}, \ldots \overline{X}_{in}$ *non* possono essere tutte nulle.

Mostrerò che il solo esame del determinante Δ permette anzitutto di stabilire se le n congruenze assegnate siano associabili in n famiglie di ipersuperficie, e inoltre di scrivere le equazioni ai differenziali totali della trasformazione che dal sistema di coordinate x_i conduce al sistema di coordinate in cui le linee parametriche sono le linee delle congruenze (1).

Siano y_i, $(i = 1, 2, 3, \ldots n)$, n parametri. Supponiamo per il momento, di tener fisso l'indice i e di indicare con k un generico indice diverso da i. La condizione affinchè la famiglia di ipersuperficie

$$y_i = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \tag{2}$$

contenga la congruenza X_k si esprime annullando la derivata di y_i fatta nella direzione delle linee della congruenza X_k.

Tenendo presente la (1) questa condizione assume la forma:

$$\sum_1^n {}_l\, X_k^{(l)} \frac{\partial f_i}{\partial x_l} = 0 \tag{3}$$

e poichè noi esigiamo che la famiglia di ipersuperficie (2) contenga $n - 1$ fra le congruenze date, dovremo attribuire a k $n - 1$ valori

$$k = 1, 2, \ldots i - 1, i + 1, \ldots n;$$

in corrispondenza dei quali la 3) dà un sistema di $n - 1$ equazioni differenziali per la funzione f_i, e tutto si riduce ad esprimere le condizioni affinchè questo sistema sia completo.

La via più breve consiste nell'osservare che, non essendo tutti nulli gli elementi reciproci relativi alla linea i^{esima} del determinante Δ, è possibile risolvere algebricamente il sistema (3) e l'effettiva risoluzione porge:

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_l} = \varrho_i \overline{X}_{il} \qquad (l = 1, 2, \ldots n) \tag{3'}$$

dove ϱ_i è un fattore di proporzionalità. È chiaro che le condizioni in questione coincidono con le condizioni affinchè il primo membro dell'equazione di Pfaff

$$\sum_1^n {}_l\, \overline{X}_{il}\, dx_l = 0 \tag{3''}$$

sia illimitatamente integrabile. Perciò per un noto teorema [1] occorre e basta che le $\overline{X}_{il}$ verifichino le relazioni:

$$\overline{X}_{ij} \left\{ \frac{\partial \overline{X}_{il}}{\partial x_h} - \frac{\partial \overline{X}_{ih}}{\partial x_l} \right\} + \overline{X}_{il} \left\{ \frac{\partial \overline{X}_{ih}}{\partial x_j} - \frac{\partial \overline{X}_{ij}}{\partial x_h} \right\} + \overline{X}_{ih} \left\{ \frac{\partial \overline{X}_{ij}}{\partial x_l} - \frac{\partial \overline{X}_{il}}{\partial x_j} \right\} = 0 \tag{4}$$

$$(j, l, h = 1, 2, \ldots n)$$

delle quali soltanto $\dfrac{(n-1)(n-2)}{2}$ (per es. quelle nelle quali si faccia $j = n$; $l, h = 1, 2, \ldots n - 1$; $l \neq h$) sono indipendenti fra loro.

[1] Cfr. p. es. il cap. II delle *Lezioni di calcolo differenziale assoluto* di T. Levi-Civita in corso di pubblicazione per cura di E. Persico (ed. Stock., Roma).

Se le (4) sono soddisfatte, la (3″) fornisce mediante integrazione la equazione (2) della famiglia di ipersuperficie contenente le congruenze $X_1, X_2, \dots X_{i-1}, X_{i+1}, \dots X_n$.

Attribuiamo ora ad i successivamente gli n valori $1, 2, 3, \dots n$. Affinchè le n equazioni (2) possano riguardarsi come atte a definire la trasformazione di coordinate richiesta, occorre assicurarci che lo Jacobiano delle f_i rispetto alle x_i sia diverso da zero; ma in virtù della (3′) e di un noto teorema sui determinanti reciproci, questo fatto equivale a $\Delta \neq 0$.

Le condizioni annunciate sono quindi racchiuse nelle formule (4).

Conviene ora lumeggiare questo risultato interpretando le formule (4) in una varietà metrica V_n qualunque.

Sia:

$$ds^2 = \sum_{1}^{n}{}_{ih}\, a_{ih}\, dx_i\, dx_h$$

il quadrato del suo elemento lineare, dato *a priori*.

Poniamo:

$$\overline{X}_{il} = \sum_{1}^{n}{}_{j}\, a_{jl}\, \overline{X}_i^{(l)}. \qquad (i, l = 1, 2, \dots, n) \tag{5}$$

Le equazioni differenziali:

$$\frac{dx_1}{\overline{X}_i^{(1)}} = \frac{dx_2}{\overline{X}_i^{(2)}} = \cdots = \frac{dx_n}{\overline{X}_i^{(n)}} \qquad (i = 1, 2, \dots n) \tag{6}$$

individuano n congruenze di curve; queste congruenze sono in generale distinte dalle (1), ma si sa che coincidono con esse quando (e soltanto quando) le (1) stesse sono a due a due perpendicolari fra loro.

Nell'ipotesi più ampia in forza delle formule (3) — nelle quali si tenga conto delle (3′) e delle (5) — ciascuna congruenza (6) viene definita come il sistema delle curve ortogonali ad $n - 1$ congruenze (1). Da questo punto di vista le (4) assumono un significato geometrico preciso, in quanto notoriamente esprimono la condizione necessaria e sufficiente affinchè le congruenze (6) siano *normali*.