ATTI
DELLA
REALE ACCADEMIA NAZIONALE
DEI LINCEI

ANNO CCCXX

1923

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXXII.

1° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1923

Fisica matematica. — *Sul trascinamento del piano di polarizzazione da parte di un mezzo rotante.* Nota di ENRICO FERMI, presentata dal Corrispondente L. PUCCIANTI.

1. Le esperienze di Fizeau, e le numerose teorie relativistiche e non relativistiche che ne son state fatte, hanno dimostrato che la luce che si propaga in un mezzo in moto è trascinata nel senso di questo non completamente, ma con un coefficiente di trascinamento eguale a $\frac{n^2-1}{n^2}$, essendo n l'indice di rifrazione del mezzo. Mi sono proposto lo studio di un problema analogo. Supponiamo che un mezzo trasparente ruoti attorno ad un asse e che della luce polarizzata rettilineamente si propaghi attraverso al mezzo parallelamente all'asse; se il piano di polarizzazione fosse trascinato completamente dalla rotazione del mezzo, esso dovrebbe evidentemente presentare una specie di potere rotatorio, di grandezza $\frac{\omega n}{c}$, essendo ω la velocità angolare e c la velocità della luce, poichè a percorrere la lunghezza 1 la luce impiega il tempo $\frac{n}{c}$, ed in questo tempo il mezzo ruota appunto dell'angolo $\frac{\omega n}{c}$.

Troveremo invece [1] che le cose vanno diversamente, e che anche in questo caso bisogna tener conto di un coefficiente di trascinamento, che si trova ancora eguale precisamente a quello di Fizeau, per modo che come potere rotatorio, invece che $\frac{\omega n}{c}$, si trova $\frac{n^2-1}{n^2}\frac{\omega n}{c}$.

2. Consideriamo un dielettrico isotropo di polarizzabilità elettrica k, per modo che, essendo n l'indice di rifrazione, sia

$$n^2 = 1 + 4\pi k \,. \tag{1}$$

[1] J. J. Thomson ha studiato lo stesso problema (*Proc. Camb. Soc.*, 1885) trovando un coefficente di trascinamento eguale ad 1; ma la sua conclusione è errata, perchè in essa si considerano i campi elettrico e magnetico della luce come trasversali anche nel mezzo in moto, ciò che è in evidente contrasto con la formula (4) del suo lavoro. Un'altra causa di errore nel lavoro di Thomson consiste nel porre $f=\frac{K}{4\pi}P$; essendo P, Q, R, conformemente alle (4) (5) (6), calcolate come somma della forza elettrica P' e della forza elettromagnetica P'' agente sul corpo per effetto del suo moto; poichè quest'ultima agisce solo sopra lo spostamento elettrico del corpo e non su quello dell'etere. La formula corretta sarebbe $f=\frac{KP'}{4\pi}+\frac{K-1}{4\pi}P''$.

Il suo risultato è del resto evidentemente in contraddizione col fatto intuitivo che il coefficiente deve certo essere nullo, per corpi di indice di rifrazione $=1$.

Supponiamo poi che il dielettrico ruoti attorno all'asse x con velocità angolare ω. Essendo E ed H le forze elettrica e magnetica, le equazioni di Maxwell [1] si scriveranno per esso:

$$\text{rot}\,E = -\frac{1}{c}\frac{\partial H}{\partial t}\,; \quad \text{rot}\,H = \frac{1}{c}\left(\frac{\partial E}{\partial t} + 4\pi j\right), \tag{2}$$

dove j rappresenta la densità di corrente (u. e. s.). Indicando con S la polarizzazione, si vede subito che j è la somma della corrente dovuta alla variazione della S col tempo $\frac{dS}{dt}$, e della corrente dovuta alla convezione delle cariche elettriche libere $= -V\,\text{div}\,S$, se con V si indica la velocità del punto generico del dielettrico. Si ha dunque

$$j = \frac{\partial S}{\partial t} - V\,\text{div}\,S. \tag{3}$$

D'altra parte, S sarà dato [2] da

$$S = k\left(E + \frac{1}{c}V \wedge H\right). \tag{4}$$

3. Abbiamo così raccolto tutti gli elementi per lo svolgimento della nostra teoria; per semplificare un po' le cose limiteremo le nostre considerazioni ai punti posti assai vicino all'asse di rotazione x, e trascureremo i quadrati [3] di ω.

Cerchiamo se si possono soddisfare le (2) con le posizioni

$$E_x = E_x(x\,,y\,,z\,,t)\,;\; E_y = E_y(x\,,t)\,;\; E_z = E_z(x\,,t)\,;$$
$$H_x = 0\,;\; H_y = H_y(x\,,t)\,;\; H_z = H_z(x\,,t),$$

introducendo cioè, oltre alle ordinarie componenti trasversali dei vettori elettrico e magnetico, anche una componente longitudinale del vettore elettrico. Tenendo presente che le componenti di V sono $0\,,\, -\omega z\,,\, \omega y$, si ha dalla (4)

$$S_x = k\left\{E_x - \frac{\omega}{c}(y H_y + z H_z)\right\};\; S_y = k E_y\,;\; S_z = k E_z$$

$$\text{div}\,S = k\left\{\frac{\partial E_x}{\partial x} - \frac{\omega}{c}\left(y\frac{\partial H_y}{\partial x} + z\frac{\partial H_z}{\partial x}\right)\right\}$$

[1] Abbiamo scritto le equazioni di Maxwell senza metter esplicitamente in evidenza la costante dielettrica, perchè di essa è tenuto conto nel termine $4\pi j$.

[2] Ciò equivale manifestamente a far la teoria trascurando la dispersione, ponendo cioè l'indice di rifrazione per tutte le lunghezze d'onda eguale alla radice quadrata della costante dielettrica.

[3] Propriamente il numero di cui si trascurano i quadrati è $\frac{\omega r}{c}$, essendo r la massima distanza, dall'asse, dei punti in considerazione.

e quindi per la (3), trascurando i termini in ω^2,

$$j_x = k\left\{\frac{\partial E_x}{\partial t} - \frac{\omega}{c}\left(y\frac{\partial H_y}{\partial t} + z\frac{\partial H_z}{\partial t}\right)\right\};\quad j_y = k\left\{\frac{\partial E_y}{\partial t} + \omega z\frac{\partial E_x}{\partial x}\right\};$$

$$j_z = k\left\{\frac{\partial E_z}{\partial t} - \omega y\frac{\partial E_z}{\partial x}\right\}.$$

Le (2), nella solita approssimazione, possono ora scriversi:

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -\frac{1}{c}\frac{\partial H_y}{\partial t} \\ &\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -\frac{1}{c}\frac{\partial H_z}{\partial t}\end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} &n^2\frac{\partial E_x}{\partial t} = (n^2-1)\frac{\omega}{c}\left(y\frac{\partial H_y}{\partial t} + z\frac{\partial H_z}{\partial t}\right) \\ &-\frac{\partial H_z}{\partial x} = \frac{1}{c}\frac{\partial E_y}{\partial t} + \frac{4\pi k}{c}\left\{\frac{\partial E_y}{\partial t} + \omega z\frac{\partial E_x}{\partial x}\right\} \\ &\frac{\partial H_y}{\partial x} = \frac{1}{c}\frac{\partial E_z}{\partial t} + \frac{4\pi k}{c}\left\{\frac{\partial E_z}{\partial t} - \omega y\frac{\partial E_x}{\partial x}\right\}\end{aligned}\right.$$

Dalla prima equazione del secondo gruppo si rileva che E_x contiene ω, e quindi le due ultime possono semplificarsi trascurando i termini in ω^2.

Tenendo presente (1), le (5) possono semplificarsi e scriversi:

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -\frac{1}{c}\frac{\partial H_y}{\partial t} \\ &\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -\frac{1}{c}\frac{\partial H_z}{\partial t}\end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} &n^2\frac{\partial E_x}{\partial t} = (n^2-1)\frac{\omega}{c}\left(y\frac{\partial H_y}{\partial t} + z\frac{\partial H_z}{\partial t}\right) \\ &-\frac{\partial H_z}{\partial x} = \frac{n^2}{c}\frac{\partial E_y}{\partial t} \\ &\frac{\partial H_y}{\partial x} = \frac{n^2}{c}\frac{\partial E_z}{\partial t}\end{aligned}\right.$$

Con facili operazioni di eliminazione si deduce da queste trascurando termini in ω^2:

$$(7)\quad \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} - \frac{n^2}{c^2}\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = \frac{(n^2-1)\,\omega}{c^2}\frac{\partial E_z}{\partial t};\quad \frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} - \frac{n^2}{c^2}\frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} = -\frac{(n^2-1)\,\omega}{c^2}\frac{\partial E_y}{\partial t}.$$

Proviamo a soddisfarle ponendo

$$E_y = \mathcal{E}_y\, e^{2\pi\nu\left(t-\frac{n'x}{c}\right)};\quad E_z = \mathcal{E}_z\, e^{2\pi\nu\left(t-\frac{n'x}{c}\right)},$$

essendo $\mathcal{E}_y$, $\mathcal{E}_z$ costanti complesse; le (7) ci dànno

$$(7^{bis})\quad \begin{aligned} 2\pi\nu\,\mathcal{E}_y(n^2-n'^2) &= (n^2-1)\,\omega i\,\mathcal{E}_z \\ 2\pi\nu\,\mathcal{E}_z(n^2-n'^2) &= -(n^2-1)\,\omega i\,\mathcal{E}_y\end{aligned}$$

Per aver soluzioni non identicamente nulle, deve dunque essere:

$$4\pi\nu^2(n^2-n'^2)^2 = (n^2-1)^2\,\omega^2,$$

dalla quale si deduce

$$n'^2 = n^2 \pm \frac{(n^2-1)\,\omega}{2\pi\nu},$$

cioè, con la nostra solita approssimazione,

$$n' = n\left(1 \pm \frac{(n^2-1)\,\omega}{4\pi\nu n^2}\right). \tag{8}$$

I due valori n'_1 ed n'_2 che la (8) dà per n', sono i due indici di rifrazione delle onde polarizzate circolarmente nei due sensi (come subito si rileva dalle 7-*bis*). Essi sono, come è noto, legati al potere rotatorio R dalla relazione $R = 2\pi\,(n'_1 - n'_2)\,\frac{\nu}{c}$. Tenendo dunque presenti i valori (8), si trova infine

$$R = \frac{n^2-1}{n^2}\,\frac{\omega n}{c}.$$

Il coefficente di trascinamento del piano di polarizzazione è dunque, come si era annunziato, eguale a quello di Fizeau, e cioè

$$\frac{n^2-1}{n^2}.$$

Fisica matematica. — *La trasformazione di Voigt-Lorentz nella fisica classica*. Nota di PAOLO STRANEO, presentata dal Socio ALFONSO DI LEGGE.

L'uso generalmente invalso di dedurre le equazioni di questa ormai notissima trasformazione dai due postulati, che Einstein ha assunti come base della teoria della relatività ristretta, ha poco opportunamente fatto passare in seconda linea le altre considerazioni che conducono ad essa e per conseguenza anche lo studio della sua utilizzazione nel campo della fisica classica.

Ciò è particolarmente spiacevole perchè preclude la via più diretta per istituire confronti assai istruttivi fra la concezione classica e quella relativista di uno stesso fenomeno, confronti che costituiscono, in ultima analisi, le vere *basi fisiche* della teoria della relatività.

È stato perciò molto opportuno che il prof. Somigliana [1] abbia richiamato l'attenzione sull'antico e poco noto lavoro del Voigt [2], precedente di un ventennio le teorie relativiste, nel quale questa notevole trasformazione è stata dedotta e impiegata per la prima volta per giungere, nel campo della fisica ordinaria, a certe espressioni di fenomeni e alle loro interpretazioni che, senza dubbio, non si sarebbero raggiunte con tanta facilità per altra via.

[1] Ved. questi Rendiconti, vol. XXXI, 1° sem., pag. 409.

[2] W. Voigt, *Ueber das Doppler'sche Princip*. Nachr. der K. Ges. der Wissen. zu Göttingen, 1° märz 1887.