ATTI
DELLA
REALE ACCADEMIA NAZIONALE
DEI LINCEI

ANNO CCCXX

1923

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXXII.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1923

dalla quale si deduce

$$n'^2 = n^2 \pm \frac{(n^2 - 1)\,\omega}{2\pi\nu}\,,$$

cioè, con la nostra solita approssimazione,

$$n' = n\left(1 \pm \frac{(n^2 - 1)\,\omega}{4\pi\nu n^2}\right). \tag{8}$$

I due valori n'_1 ed n'_2 che la (8) dà per n', sono i due indici di rifrazione delle onde polarizzate circolarmente nei due sensi (come subito si rileva dalle 7-*bis*). Essi sono, come è noto, legati al potere rotatorio R dalla relazione $R = 2\pi\,(n'_1 - n'_2)\,\frac{\nu}{c}$. Tenendo dunque presenti i valori (8), si trova infine

$$R = \frac{n^2 - 1}{n^2}\,\frac{\omega n}{c}\,.$$

Il coefficente di trascinamento del piano di polarizzazione è dunque, come si era annunziato, eguale a quello di Fizeau, e cioè

$$\frac{n^2 - 1}{n^3}\,.$$

Fisica matematica. — *La trasformazione di Voigt-Lorentz nella fisica classica.* Nota di PAOLO STRANEO, presentata dal Socio ALFONSO DI LEGGE.

L'uso generalmente invalso di dedurre le equazioni di questa ormai notissima trasformazione dai due postulati, che Einstein ha assunti come base della teoria della relatività ristretta, ha poco opportunamente fatto passare in seconda linea le altre considerazioni che conducono ad essa e per conseguenza anche lo studio della sua utilizzazione nel campo della fisica classica.

Ciò è particolarmente spiacevole perchè preclude la via più diretta per istituire confronti assai istruttivi fra la concezione classica e quella relativista di uno stesso fenomeno, confronti che costituiscono, in ultima analisi, le vere *basi fisiche* della teoria della relatività.

È stato perciò molto opportuno che il prof. Somigliana (¹) abbia richiamato l'attenzione sull'antico e poco noto lavoro del Voigt (²), precedente di un ventennio le teorie relativiste, nel quale questa notevole trasformazione è stata dedotta e impiegata per la prima volta per giungere, nel campo della fisica ordinaria, a certe espressioni di fenomeni e alle loro interpretazioni che, senza dubbio, non si sarebbero raggiunte con tanta facilità per altra via.

(¹) Ved. questi Rendiconti, vol. XXXI, 1° sem., pag. 409.

(²) W. Voigt, *Ueber das Doppler'sche Princip.* Nachr. der K. Ges. der Wissen. zu Göttingen, 1° märz 1887.

La presente Nota esaminerà un po' più diffusamente il significato di questa trasformazione e l'uso che se ne può fare nel campo classico, col doppio intento di contribuire allo studio di una questione già di per sè interessante e nello stesso tempo di preparare le basi di una prossima Nota, nella quale verranno, con grande semplicità, posti in evidenza i rapporti che intercedono fra i significati fisici, che a questa trasformazione si possono annettere, nel campo classico e in quello della relatività.

1. Consideriamo un fenomeno fisico di natura elettromagnetica. Se è presumibile che esso possa essere caratterizzato per mezzo di grandezze fisiche u, v, w, funzioni delle coordinate e del tempo, sappiamo che lo potremo rappresentare mediante una o più equazioni indefinite (eq. differenziali o loro integrali con costanti o funzioni arbitrarie), le quali esprimono le leggi di tutti i fenomeni di quel tipo, associate a qualche equazione condizionale, che esprimerà in generale il comportamento delle funzioni u, v, w in particolari regioni (superficie, curve, punti singolari, infinito ecc.) rappresentate, per es., con un'eq. $f(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}) = 0$.

Quando sono verificate certe condizioni, che in ultima analisi si riducono a che — *fisicamente* il fenomeno sia determinato — e *matematicamente* che le eq. di condizione siano atte a determinare quanto vi è di arbitrario nelle eq. indefinite, le u, v, w possono venire espresse univocamente in forma esplicita.

Reciprocamente, note le u, v, w, si può ricostruire, in generale in infiniti modi, sistemi del tipo considerato associando alle eq. indefinite le espressioni particolari delle u, v, w in certe condizioni opportunamente scelte; ciò che fisicamente significa che il fenomeno espresso dalle u, v, w può venir attribuito a differenti condizioni particolari, pur restando sempre del tipo dei fenomeni retti da quelle eq. indefinite fondamentali.

2. Supponiamo ora di eseguire una trasformazione di Voigt-Lorentz successivamente sulle varie equazioni che abbiamo considerate.

Essa non altererà la forma delle equazioni indefinite, nè di quelle esprimenti le u, v, w, perchè tali equazioni esprimono un caso particolare delle leggi elettromagnetiche generali, le cui equazioni sono invarianti per ogni trasformazione di V-L. Ciò fisicamente significa che ogni fenomeno di natura elettromagnetica appare ancora tale quando, invece che dal sistema di riferimento x, y, z, t, lo si consideri da un sistema x', y', z', t', dedotto dal precedente mediante una trasformazione di V-L.

Le equazioni di condizioni invece, non essendo l'enunciato di una legge elettromagnetica, ma semplicemente di qualche circostanza particolare, risulteranno in generale modificate dalla trasformazione. Ciò fisicamente significa che, considerato dal sistema di riferimento x', y', z', t', il fenomeno *apparirà svolgersi in condizioni particolari differenti* da quelle secondo il sistema x, y, z, t, *pur avendo conservata la sua indole fondamentale.*

In conclusione il fenomeno rappresentato dalle equazioni definite esprimenti le u', v', w' (trasformate delle u, v, w) potrà anche essere espresso per mezzo delle equazioni indefinite trasformate delle primitive, ma ad esse dovranno esser associate eq. condizionali, che in generale non saranno le trasformate delle eq. condizionali primitive. Ma, per quanto si è detto al n. 1 sarà in generale possibile di costruire di queste eq. condizionali, assumendo per es. opportunamente qualche successione di valori delle variabili $\overline{x}', \overline{y}', \overline{z}'$, ed esprimendo i valori $\overline{u}', \overline{v}', \overline{w}'$ che per essi assumono le u', v', w'. Vedremo esser particolarmente interessante assumere quale successione per i valori $\overline{x}', \overline{y}', \overline{z}'$ quelle corrispondenti alle trasformate delle equazioni che, nel sistema primitivo, definivano la regione $f(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}) = 0$, su cui le u, v, w dovevano assumere i valori $\overline{u}, \overline{v}, \overline{w}$. E ciò a cagione delle importanti interpretazioni fisiche che si potranno dedurre.

3. Per chiarire quanto per ragioni di spazio è stato detto forse troppo concisamente, trattiamo come esempio il problema della propagazione delle onde in un mezzo elastico incompressibile, come hanno fatto il Voigt e il Somigliana.

Le eq. indefinite, indicando con v la velocità di propagazione sono:

$$1) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta_2 u \,, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \Delta_2 v \,, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \Delta_2 w \,, \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \,.$$

Sia inoltre stabilito che sulla superficie

$$2) \qquad f(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}) = 0$$

debba essere soddisfatta la condizione

$$3) \qquad u = \overline{\mathrm{U}}(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}, t) \,, \quad v = \overline{\mathrm{V}}(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}, t) \,, \quad w = \overline{\mathrm{W}}(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}, t) \,.$$

Per le note proprietà delle eq. 1), sappiamo che esistono soluzioni univoche

$$4) \qquad u = \mathrm{U}(x, y, z, t) \,, \quad v = \mathrm{V}(x, y, z, t) \,, \quad w = \mathrm{W}(x, y, z, t)$$

le quali soddisfano alle 1), 2), e 3) e fisicamente rappresentano la propagazione delle onde emananti dalla superficie 2), quando si trovi nello stato di vibrazione 3).

Reciprocamente conoscendo le 4), possiamo ricostruire in infiniti modi dei sistemi equivalenti (entro certi limiti) al sistema delle 1), 2) e 3), associando alle eq. 1) l'eq. di qualche superficie $\varphi(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = 0$, che potrà essere scelta con grande arbitrarietà, unitamente alle espressioni speciali che le u, v, w assumono su quella superficie. Fisicamente ciò non rappresenta che un'ovvia applicazione del principio di Huyghens.

4. Eseguiamo ora una trasformazione di V.-L. sulle eq. 1) e 4). Essendo esse un caso particolare delle eq. elettromagnetiche, invarianti per tale trasformazione, dovranno conservare, nel sistema x', y', z', t', la forma che avevano nel sistema x, y, z, t, ciò che fisicamente significa che, nel nuovo sistema, il fenomeno si manifesterà ancora come una propagazione di onde. Avremo quindi:

$$1') \quad \frac{\partial^2 u'}{\partial t'^2} = c^2 \Delta_2 u' , \quad \frac{\partial^2 v'}{\partial t'^2} = c^2 \Delta_2 v' , \quad \frac{\partial^2 w'}{\partial t'^2} = c^2 \Delta_2 w' , \quad \frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial v'}{\partial y'} + \frac{\partial w'}{\partial z'} = 0 .$$

$$4') \quad u' = \mathrm{U}(x', y', z', t') , \quad v' = \mathrm{V}(x', y', z', t') , \quad w' = \mathrm{W}(x', y', z', t') .$$

Per quanto si è detto precedentemente, associando alle 1') equazioni esprimenti i particolari valori $\dot{u}', \dot{v}', \dot{w}'$ che le u', v', w' assumono su di un'arbitraria superficie $\varphi(\dot{x}', \dot{y}', \dot{z}') = 0$, potremo formare infiniti sistemi equivalenti, entro certi limiti, alle eq. 4').

Specializziamo ora la scelta della superficie, assumendola di equazione corrispondente alla trasformata della 2):

$$2') \qquad f'(\bar{x}', \bar{y}', \bar{z}') = 0 .$$

Su tale superficie i valori delle 4' saranno:

$$3') \quad \bar{u}' = \mathrm{U}(\bar{x}', \bar{y}', \bar{z}, t') , \quad \bar{v} = \mathrm{V}(\bar{x}', \bar{y}', \bar{z}, t') , \quad \bar{w}' = \mathrm{W}(\bar{x}', \bar{y}', \bar{z}', t') .$$

Così l'eq. 4') rappresenterà nel sistema x', y', z', t' la propagazione delle onde emananti dalla superficie 2'), quando essa vibri secondo le 3').

La superficie 2') è fissa nel sistema x', y', z', il quale è invece in moto traslatorio uniforme relativamente al sistema x, y, z. La forma e la orientazione della superficie $f' = 0$ nel sistema x', y', z' è in generale differente da quella della superficie $f = 0$ nel sistema x, y, z, come pure è differente il suo modo di vibrare.

E così, coll'artificio di usare una trasformazione di V.-L., possiamo venire abbastanza facilmente in possesso di espressioni atte a rappresentare, in un sistema in moto uniforme relativamente all'etere, il fenomeno della propagazione di onde emananti da certe superficie, fisse in quel sistema e che vibrino secondo certe leggi.

5. Tutto ciò in fondo significa che abbiamo potuto in certo modo *girare* la difficoltà matematica di integrare il sistema più complesso che si sarebbe dovuto sostituire alle eq. 1), mentre fisicamente non abbiamo nè conseguito, nè compromesso assolutamente nulla.

Volendo trattare, nel sistema in moto, il caso di una data superficie, orientata in un certo modo, basterà considerare, nel sistema fisso, una superficie la cui equazione sia la trasformata inversa di quella del sistema in moto. Così per es., dato che la trasformata di una superficie sferica col centro all'origine nel sistema fisso è una superficie elissoidale di rotazione *appiattita*, col centro all'origine del sistema in moto, e orientata coll'asse minore nel senso del movimento del sistema, — volendo trattare nel sistema mobile il caso di una sfera, si dovrà dapprima risolvere, nel sistema fisso, il problema della propagazione di onde emananti da una superficie di rotazione elissoidale *allungata*.

Più difficile è invece vedere *a priori* quale legge di vibrazione convenga assumere sulla superficie del sistema fisso, per ottenere, in fine, sulla superficie del sistema mobile la legge di vibrazione desiderata. La difficoltà dipende, come è noto, dal fatto che, in seguito alla trasformazione di V.-L., la misura del tempo t' nel sistema x', y', z' non ha carattere assoluto, ma dipende, oltre che dalla velocità di tutto il sistema, anche dal posto. Ma, malgrado questa difficoltà, in molti casi semplici il problema può esser risoluto coi mezzi analitici soliti. Ritornando all'esempio precedente, — dato che ad una vibrazione uniforme per tutti i punti di una sfera fissa, corrisponderebbe, sull'elissoide appiattito del sistema mobile, una legge di vibrazione, simmetrica rispetto all'asse, ma non costante lungo una generatrice, — se si vuole che la sfera nel sistema mobile vibri uniformemente, si dovrà assumere, sull'elissoide allungato del sistema fisso, una legge di vibrazione, simmetrica rispetto all'asse, ma opportunamente variabile lungo una generatrice, legge che non è difficile determinare.

Quando prossimamente studieremo i rapporti fra l'interpretazione classica e quella relativista, risolveremo, col metodo ora indicato, il caso della propagazione delle onde emananti da piani e da sfere in moto traslatorio e ne dedurremo varie conseguenze di interesse fisico.

Geofisica. — *Le pioggie eccezionali sul versante orientale della Sicilia.* Nota di Filippo Eredia, presentata dal Corrispondente Luigi Palazzo.

Nel mese di novembre 1920 lungo il versante orientale della Sicilia, quasi ovunque, si verificarono pioggie abbondanti; le cifre contenute nella seguente tabella sono eloquenti per se stesse e gli scostamenti dalla quantità normale mostrano l'eccezionalità della pioggia caduta in detto mese. In alcuni luoghi, la pioggia caduta nel solo novembre superò o fu poco diversa alla normale quantità media che suole cadere in un'intera annata.

Dall'esame delle massime cadute di pioggia che negli anni precedenti si erano verificate in ciascuna stazione, l'eccezionalità del novembre 1920 non appare per alcune località, come Riposto, Paternò, così ragguardevole come per le rimanenti, ma ciò nulla toglie all'eccezionalità del fenomeno.