

ATTI
DELLA
REALE ACCADEMIA NAZIONALE
DEI LINCEI

ANNO CCCXX
1923

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXXII.

1° SEMESTRE.



ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1923

Fisica. — *Sulla viscosità dielettrica e l'effetto Born nella ipotesi dei dipoli permanenti o in quella della polarizzabilità molecolare.* Nota del Socio O. M. CORBINO.

La ipotesi di Larmor che le molecole dei dielettrici costituiscano, anche in assenza di un campo esterno, dei veri dipoli elettrici, con un momento elettrico permanente e di valore indipendente dal campo esterno, fu sviluppata da Debye e da M. Born, dopo che il Langevin ne aveva dedotta la spiegazione della birifrangenza elettrica e magnetica ⁽¹⁾. Ma a una spiegazione egualmente soddisfacente si giunge ammettendo che le molecole abbiano in diverse direzioni una diversa possibilità di assumere la polarizzazione per virtù di un campo esterno.

Le previsioni quantitative sulla legge di variazione della costante dielettrica e della birifrangenza con la temperatura non sono proprio identiche secondo le due teorie, ma differiscono così poco che non è stato possibile decidere in modo sicuro, anche ricorrendo a esperienze assai difficili e complesse, della validità della teoria dipolare ⁽²⁾.

Altri effetti dovuti all'orientamento delle molecole in un campo variabile o rotante sono stati previsti dal Born ⁽³⁾ per i dielettrici e da me ⁽⁴⁾ per il caso delle soluzioni colloidali di idrato ferrico, nella ipotesi di un momento permanente molecolare; questi effetti sono stati anche verificati con l'esperienza ⁽⁵⁾.

Mi propongo in questa Nota di ricercare se effetti analoghi sono prevedibili partendo dalla seconda ipotesi, della polarizzabilità anisotropa delle particelle; e ciò allo scopo di dedurre, dal confronto con l'esperienza, criteri più sicuri di decisione fra le due teorie.

*
* *

Supporremo col Langevin che la particella abbia una struttura tipo ellissoide di rivoluzione nei riguardi della polarizzabilità per effetto di un campo esterno, cosicchè essa assuma per effetto di un campo una polarizzazione con coefficiente α_1 se l'asse principale è diretto secondo il campo

⁽¹⁾ Langevin, *Le Radium* 7, p. 249; 1910. Debye, *Phys. Z. S.* 13, p. 97; 1912. M. Born, *Ann. d. Phys.* 55 p. 177; 1918.

⁽²⁾ P. Lertes, *Z. S. f. Phys.* 6 p. 257; 1921.

⁽³⁾ Born, *Z. S. f. Phys.* 1, p. 221; 1921.

⁽⁴⁾ Corbino, *Rend. Lincei*, vol. XXXII, 2° sem., pag. 59; 1923.

⁽⁵⁾ P. Lertes, *Z. S. f. Phys.* 6, p. 56, 1921.

e con coefficiente α_2 se l'asse è normale al campo. Pertanto se il campo h è diretto secondo la direzione x della figura 1, e l'asse della particella

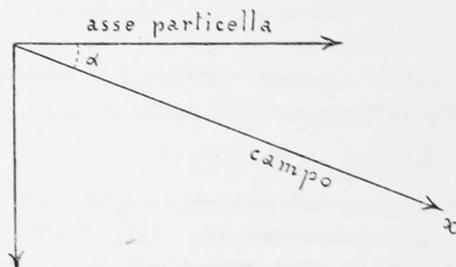


FIG. 1.

forma col campo un angolo α , si produrrà una polarizzazione $\alpha_1 h \cos \alpha$ nel senso dell'asse, e una polarizzazione $\alpha_2 h \sin \alpha$ nel senso normale. Ne risulta una coppia orientatrice avente il momento

$$\begin{aligned} \Pi &= h^2 (\alpha_1 \sin \alpha \cos \alpha - \alpha_2 \sin \alpha \cos \alpha) \\ &= \frac{h^2}{2} \sin 2\alpha (\alpha_1 - \alpha_2). \end{aligned}$$

Supponiamo adesso che il campo vari sinusoidalmente;

$$h = H \sin \omega t$$

e si ponga

$$(1) \quad B = \frac{1}{2} H^2 (\alpha_1 - \alpha_2);$$

si avrà

$$\Pi = B \sin 2\alpha \sin^2 \omega t = \frac{B}{2} \sin 2\alpha (1 - \cos 2\omega t).$$

La coppia si può perciò scomporre in due parti:

$$\begin{aligned} \Pi^1 &= \frac{B}{2} \sin 2\alpha \\ \Pi^{11} &= -\frac{B}{2} \sin 2\alpha \cos 2\omega t \end{aligned}$$

delle quali la prima è indipendente dal tempo.

Riprendendo i ragionamenti svolti nel lavoro citato, data la piccolissima perturbazione apportata dal campo nella distribuzione uniforme delle particelle determinata dall'agitazione termica, si può dedurre che la concentrazione c , relativa all'angolo α (tale cioè che $2\pi c \sin \alpha \cdot d\alpha$ denota il

numero di particelle il cui asse forma con la direzione del campo un angolo compreso fra α e $\alpha + d\alpha$, è data da

$$c = M [1 + a \cos \alpha - a' \cos \alpha \cos (2\omega t - \delta)]$$

dove

$$a = \frac{B \cos \alpha}{kT} \quad ; \quad a' = \frac{B \cos \alpha}{\sqrt{k^2 T^2 + \omega^2 r^2}} = \frac{2B \cos \alpha}{\epsilon r}$$

$$\text{tang } \delta = \frac{\omega r}{kT}$$

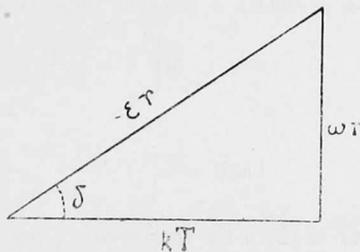


FIG. 2.

e perciò

$$(2) \quad c = M \left[1 + \frac{B}{kT} \cos^2 \alpha - \frac{2B \cos^2 \alpha}{\epsilon r} \cos (2\omega t - \delta) \right].$$

Per calcolare la polarizzazione si osservi che ogni particella ha come momento elettrico proiettato sull'asse del campo,

$$\mu = (\alpha_1 \cos^2 \alpha + \alpha_2 \sin^2 \alpha) h$$

e perciò il momento per unità di volume sarà

$$P = \int_0^\pi 2\pi c \sin \alpha \mu h d\alpha.$$

Sostituendo ed effettuando i calcoli si ha

$$P = 2\pi M h \int_0^\pi (\alpha_1 \sin \alpha \cos^2 \alpha + \alpha_2 \sin^3 \alpha) d\alpha + \\ + 2\pi M B h \left(\frac{1}{kT} - \frac{\cos (2\omega t - \delta)}{\epsilon r} \right) \int_0^\pi (\alpha_1 \sin \alpha \cos^4 \alpha + \alpha_2 \sin^3 \alpha \cos^2 \alpha) d\alpha.$$

Gli integrali definiti sono tutti calcolabili; si ottiene così

$$(3) \quad P = 4\pi M h \left[\frac{\alpha_1 + 2\alpha_2}{3} \right] + \\ + \frac{4}{15} \pi M B h \left[\frac{1}{kT} - \frac{\cos (2\omega t - \delta)}{\epsilon r} \right] (3\alpha_1 + 2\alpha_2).$$

Per calcolare M si osservi che

$$\frac{B}{kT} = \frac{1}{2} \frac{H^2}{kT} (\alpha_1 - \alpha_2)$$

corrisponde alla grandezza che Langevin indica con la lettera μ , e che è piccolissima rispetto all'unità; a maggior ragione è piccolissima $\frac{B}{\epsilon r}$.

Ora si ha per il numero totale n di particelle

$$2\pi \int_0^\pi c \sin \alpha \, d\alpha = n.$$

Sostituendo a c il valore dato dalla (2), si ha

$$n = 4\pi M \left[1 + \frac{1}{3} \frac{B}{kT} - \frac{1}{3} \frac{B}{\epsilon r} \cos(2\omega t - \delta) \right]$$

cioè

$$4\pi M = n \left[1 - \frac{1}{3} \frac{B}{kT} + \frac{1}{3} \frac{B}{\epsilon r} \cos(2\omega t - \delta) \right]$$

e perciò la (2) è da considerare come una soluzione approssimata se nei calcoli di $\frac{\partial c}{\partial \alpha}$ si suppone, come abbiamo fatto, M costante.

Sostituendo nella espressione (3) di P si ottiene, effettuati i calcoli,

$$\frac{P}{nh} = \frac{\alpha_1 + 2\alpha_2}{3} + \frac{4}{45} \frac{B}{kT} (\alpha_1 - \alpha_2) - \frac{4}{45} \frac{B}{\epsilon r} \cos(2\omega t - \delta) (\alpha_1 - \alpha_2)$$

e poichè

$$h = H \sin \omega t$$

osservando che

$$\sin \omega t \cos(2\omega t - \delta) = -\frac{1}{2} \sin(\omega t - \delta) + \frac{1}{2} \sin(3\omega t - \delta)$$

si ottiene

$$\begin{aligned} \frac{P}{nH} = & \left[\frac{\alpha_1 + 2\alpha_2}{3} + \frac{4}{45} \frac{B}{kT} (\alpha_1 - \alpha_2) \right] \sin \omega t + \\ & + \frac{2}{45} \frac{B}{\epsilon r} (\alpha_1 - \alpha_2) \sin(\omega t - \delta) - \frac{2}{45} \frac{B}{\epsilon r} (\alpha_1 - \alpha_2) \sin(3\omega t - \delta). \end{aligned}$$

Cioè la polarizzazione risulta di tre parti: una prima, la maggiore, che varia in fase col campo, una seconda che varia con un ritardo di fase δ , e una terza che varia con frequenza tripla.

Isoliamo la seconda parte P_2 che varia come $\sin(\omega t - \delta)$:

$$P_2 = \frac{2}{45} n H \frac{B}{\epsilon r} (\alpha_1 - \alpha_2) \sin(\omega t - \delta)$$

e per la (1)

$$(4) \quad P_2 = \frac{1}{45} n \frac{H^3}{\epsilon r} (\alpha_1 - \alpha_2)^2 \sin(\omega t - \delta).$$

Se insieme col campo $H \sin \omega t$ nel senso x , se ne fa agire uno $H \cos \omega t$ nel senso y , così da produrre un campo rotante, la sostanza assumerà una polarizzazione rotante con la stessa velocità e con un ritardo angolare δ sul campo; donde una coppia per unità di volume data da

$$D = H P_2 \text{ mass. sen } \delta = \frac{1}{45} n \frac{H^4}{\epsilon r} (\alpha_1 - \alpha_2)^2 \text{ sen } \delta.$$

E poichè

$$\cos \delta = \frac{2 kT}{\epsilon r}$$

sarà

$$(5) \quad D = \frac{1}{180} n \frac{H^4}{kT} (\alpha_1 - \alpha_2)^2 \text{ sen } 2\delta.$$

Perciò dal punto di vista qualitativo anche la ipotesi della polarizzazione creata dal campo, così come quella del dipolo molecolare preesistente, giustifica le azioni di trascinamento accertate con l'esperienza.

Ma se si passa ai valori numerici le conseguenze sono molto diverse.

La grandezza H della formola rappresenta il campo *effettivo* cui è sottoposta la particella, e che risulta dal campo esterno H_0 e dalla polarizzazione in virtù della relazione di Lorentz

$$H = H_0 + \frac{4\pi}{3} P$$

e poichè la parte principale della polarizzazione è data da

$$P = n H \frac{\alpha_1 + 2\alpha_2}{3}$$

si avrà

$$H = \frac{H_0}{1 - n \frac{4\pi}{9} (\alpha_1 + 2\alpha_2)}.$$

Ma ⁽¹⁾

$$\frac{4\pi n}{9} (\alpha_1 + 2\alpha_2) = \frac{K - 1}{K + 2}$$

dove K è la costante dielettrica; quindi sostituendo il valore di H nella (5) si otterrà

$$D = \frac{1}{180} \frac{n(\alpha_1 - \alpha_2)^2 (K + 2)^4}{kT \cdot 81} H_0^4 \text{ sen } 2\delta.$$

Ma si ha ⁽¹⁾

$$\alpha_1 - \alpha_2 < \alpha_1 + 2\alpha_2 = \frac{9(K - 1)}{4\pi n(K + 2)}$$

⁽¹⁾ Langevin, l. c.

quindi

$$D < \frac{1}{180} \frac{(K-1)^2 (K+2)^2}{kT \cdot 16 \pi^2 n} H_0^4 \text{sen } 2\delta.$$

Si osservi che nonostante l'alta frequenza usata dal Lertes nelle sue esperienze, l'angolo δ è sempre assai piccolo. Si ha infatti, detto a il raggio della molecola ed η il coefficiente di attrito del liquido,

$$\text{tang } \delta = \frac{\omega r}{kT} = \frac{\omega \cdot 8\pi a^3 \cdot \eta}{kT} = \frac{\omega}{kT} \cdot 6\eta v$$

dove v è il volume molecolare. Ponendo:

$$kT = 4,2 \times 10^{-14} \quad ; \quad \omega = 4,5 \times 10^8 \quad ; \quad \eta = 0,01 \quad ; \quad v = \sim 4 \cdot 10^{-24}$$

si riconosce che $\text{tg } \delta$ è dell'ordine di 3 millesimi.

Si può quindi porre

$$\text{sen } 2\delta = 2 \text{sen } \delta = 2 \frac{\omega r}{kT} = \frac{12\eta v \omega}{kT}$$

e perciò

$$D < \frac{1}{180} \frac{(K-1)^2 (K+2)^2}{16 \pi^2 \cdot n} H_0^4 \cdot \frac{12\eta v \omega}{(kT)^2}.$$

Ora a parte che secondo le esperienze D risulta proporzionale a H_0^2 e non a H_0^4 , si ottiene che per il caso più favorevole dell'acqua, cioè per $K = 80$, $n = 3 \cdot 10^{21}$, e per un campo $H_0 = 1$, cioè 300 volt per centimetro, il calcolo dà

$$D < 4 \cdot 10^{-4}.$$

Invece il Lertes ha trovato sperimentalmente coppie di molto più elevate (dell'ordine di 10^{-1} dine — cm.) anche per i liquidi per i quali la formola darebbe coppie un milione di volte più piccole che per il caso dell'acqua, per il minore valore della costante dielettrica k .

Mi sembra pertanto di poter concludere che solo la ipotesi dell'orientamento di molecole già dotate di un momento elettrico permanente sia capace di render conto, oltre che delle varie proprietà dei dielettrici, anche dell'effetto Born, cioè del trascinarsi dei liquidi isolanti in un campo elettrico rotante.