ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE

DEI LINCEI

ANNO CCCXX

1923

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXXII.

1° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1923

Bagnando una carta con soluzione benzolica diluita del derivato fenilico ed esponendola ai raggi luminosi essa si colora tosto in violaceo e poi in nero intenso; il derivato metilico invece diventa prima rosso e successivamente violetto. Per tale ragione noi proponiamo di chiamare queste rimarchevoli sostanze col nome di *fotoazidi*.

Anche la biossiammoniaca (da acido benzosolfoidrossammico ed alcali) reagisce con tutta facilità sopra la soluzione alcalina di p-nitrosodifenilammina; in questo caso però si ottiene un prodotto di natura acida che si presenta in cristalli intensamente colorati in giallo che fondono a 74°.

Al pari delle precedenti, anche questa sostanza viene alterata in tutta facilità dal calore e dalla luce.

Pubblichiamo con tutto riserbo i risultati di queste ricerche preliminari allo scopo di poter proseguire industurbati lo studio delle interessanti reazioni e ringraziamo il laureando sig. Giuseppe Greco per l'aiuto che ci ha prestato nell'esecuzione delle esperienze.

NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Alcune proprietà dei gruppi transitivi di sostituzioni sopra lettere.* Nota di PACIFICO MAZZONI, presentata dal Socio LUIGI BIANCHI.

1. Il problema di costruire tutt'i gruppi possibili di sostituzioni sopra lettere si può ridurre a costruire i soli gruppi transitivi, perchè ogni gruppo intransitivo si può sempre ottenere, partendo da un certo numero di gruppi transitivi [1]. Qui ci proponiamo di costruire tutt'i possibili gruppi transitivi di un dato tipo, cioè oloedricamente isomorfi a un dato gruppo.

Osserviamo che se G è un gruppo e $\boldsymbol{\Gamma}$ un suo sottogruppo qualunque, nel gruppo complementare $G/\boldsymbol{\Gamma}$ abbiamo un gruppo transitivo di sostituzioni. Infatti, formato il quadro di G rispetto a $\boldsymbol{\Gamma}$:

$$G = (\boldsymbol{\Gamma}\,; \boldsymbol{\Gamma} g_2\,; \ldots ; \boldsymbol{\Gamma} g_q),$$

quella sostituzione di $G/\boldsymbol{\Gamma}$ che corrisponde a g_i porta $g_1 = 1$ in g_i; dunque esiste sempre qualche sostituzione di $G/\boldsymbol{\Gamma}$ che porti la lettera g_1 in un'altra lettera g_i, e perciò $G/\boldsymbol{\Gamma}$ è transitivo.

Inversamente, ogni gruppo transitivo è identico a un gruppo complementare. Se G è un gruppo transitivo sopra le n lettere $a_1, a_2, \ldots, a_n$ e $\boldsymbol{\Gamma}_1$ è quel suo sottogruppo che lascia ferma una data lettera a_1, formato il quadro di G rispetto a $\boldsymbol{\Gamma}_1$:

$$G = (\boldsymbol{\Gamma}_1 g_1\,; \boldsymbol{\Gamma}_1 g_2\,; \ldots ; \boldsymbol{\Gamma}_1 g_n) \text{ (ove } g_1 = 1), \tag{1}$$

(1) Vedi P. Mazzoni, *Ricerche sulla teoria dei gruppi d'ordine finito*, §§ 24 e 25.

dimostriamo che i due gruppi G e G/$\boldsymbol{\Gamma}$ coincidono, salvo il nome delle lettere su cui essi agiscono (come diremo, sono *identici*): precisamente che le sostituzioni di G/$\boldsymbol{\Gamma}$ si ottengono dalle corrispondenti di G, cambiandovi le lettere $a_1, a_2, \dots, a_n$ in $g_1, g_2, \dots, g_n$. Facciamo vedere che se g è una sostituzione di G, e h la corrispondente di G/$\boldsymbol{\Gamma}$, se g porta a_i in a_k, la h porterà g_i in g_k.

Infatti nella riga $i.^{ma}$ di (1) si trovano tutte (e sole) sostituzioni di G che portano a_1 in una stessa lettera (ad es. a_i), per $i = 1, 2, \dots, n$. Ora la $g_i g$ porterà a_1 in a_k, onde sarà $g_i g = \gamma g_k$, essendo γ una certa sostituzione di $\boldsymbol{\Gamma}$; dunque la h porta g_i in g_k. C. d. d. [1].

I gruppi complementari sono dunque i più generali gruppi transitivi.

In particolare si ha il gruppo G/1, che è transitivo e di ordine uguale al numero delle lettere su cui esso agisce (come diremo, è un *gruppo regolare*); esso è oloedricamente isomorfo a G, e si suole chiamarlo il *potenziale* di G. Per i gruppi (transitivi) regolari valgono alcuni importanti teoremi di Jordan, che estenderemo ai gruppi transitivi qualunque.

Se G *è transitivo e abeliano*, $\boldsymbol{\Gamma}_1$ si riduce a 1, *e* G *è regolare*. Se G è inoltre *ciclico*, esso è generato dalle potenze di una sostituzione circolare.

2. *I gruppi* G *transitivi di sostituzioni, di un dato tipo, cioè oloedricamente isomorfi a un dato gruppo* H, *sono* (*prescindendo dal nome delle lettere*) *tutti quelli della forma* H/K, *essendo* K *un sottogruppo di* H *tale che il massimo sottogruppo comune a* K *e ai suoi affini in* G *sia l'identità. Tra essi ne figura sempre uno regolare, il quale si ottiene prendendo per* K *l'identità.*

Infatti G coinciderà con G/$\boldsymbol{\Gamma}_1$. Ora nell'isomorfismo oloedrico supposto esistente tra G e H, al sottogruppo $\boldsymbol{\Gamma}_1$ di G corrisponderà un sottogruppo K di H (tale che il massimo sottogruppo comune a K e ai suoi affini in H sarà pure 1). Segue che G/$\boldsymbol{\Gamma}_1$ e H/K sono identici (§ 5 mio citato lavoro); e dunque pure G è identico a $\frac{\mathrm{H}}{\mathrm{K}}$. C. d. d.

Il problema proposto è risolto. In modo analogo si dimostra che:

In generale, se G *è transitivo e isomorfo a* H (*oloedricamente o meriedricamente*), *vi è sempre un sottogruppo* K *di* H *tale che* G *sia identico a* H/K.

3. *Se* G *e* G′ *sono due gruppi transitivi dello stesso tipo, se* $\boldsymbol{\Gamma}$ *è il sottogruppo di* G *che lascia ferma una sua lettera, e* $\boldsymbol{\Gamma}'$ *quello di* G′ *che ne lascia ferma una lettera, se vi è una relazione d'isomorfismo tra* G *e* G′, *in cui a ogni sostituzione di* $\boldsymbol{\Gamma}$ *ne corrisponda una di* $\boldsymbol{\Gamma}'$, *e viceversa, allora* G *e* G′ *sono identici: cioè l'uno si ottiene dall'altro, trasformandolo con una certa sostituzione.*

[1] Si vede subito che il massimo sottogruppo comune a Γ e ai suoi affini in G è 1; che il trasformato $\Gamma_i = g_i^{-1} \Gamma_1 g_i$ è quel sottogruppo di G che lascia ferma a_i; e che se G è più volte transitivo, i gruppi affini $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n$ sono tutti distinti.

Infatti G è identico a G/Γ, come G' a G'/Γ'; ma G/Γ e G'/Γ' sono pure identici (§ 5 c. s.), e dunque, ecc. C. d. d.

Se G e G' sono regolari, allora si ritrova il teorema di Jordan: Due gruppi regolari oloedricamente isomorfi sono identici.

Torniamo a dimostrare in altro modo il teorema generale, per dedurne alcune conseguenze. Siano $a_1, a_2, \ldots, a_n$ le lettere su cui agisce G; il sottogruppo Γ_1 lascia ferma a_1, ma può lasciar ferme certe r lettere $a_1, a_2, \ldots, a_r$. Formato il quadro (1), poniamo che alla sostituzione g_i di G corrisponda g'_i di G' $(i = 1, 2, \ldots, n)$; si avrà l'altro quadro (§ 5 c. s.):

$$G' = (\Gamma' g'_1 ; \Gamma' g'_2 ; \ldots ; \Gamma' g'_n).$$

Diciamo b_1 una delle lettere di G' che sono lasciate ferme da Γ', e diciamo b_i la lettera in cui g'_i porta b_1: dimostriamo che le sostituzioni di G' si ottengono dalle corrispondenti di G, cambiando le lettere $a_1, \ldots a_n$ ordinatamente in $b_1, \ldots, b_n$; ossia che si ha:

$$G' = \begin{pmatrix} b_1, b_2, \ldots, b_n \\ a_1, a_2, \ldots, a_n \end{pmatrix}^{-1} \cdot G \cdot \begin{pmatrix} b_1, b_2, \ldots, b_n \\ a_1, a_2, \ldots, a_n \end{pmatrix}.$$

Bisogna far vedere che se g porta a_i in a_k, la corrispondente g' porterà b_i in b_k. Ora $g_i g$ porta a_1 in a_k, e sarà $g_i g = \gamma g_k$; segue, prendendo le sostituzioni corrispondenti, che $g'_i g' = \gamma' g'_k$, ossia che $g' = g'^{-1}_i \gamma' g'_k$, la quale dunque porta b_i in b_k. C. d. d.

Dunque vi è una sostituzione S che trasforma le singole sostituzioni di G in quelle rispettivamente corrispondenti di G'. Il numero di tali sostituzioni S è uguale al numero r delle lettere lasciate ferme da Γ, o da Γ' (perchè b_1 era una qualunque di queste ultime).

4. In particolare, se G' coincide con G, e si fa corrispondere a ogni sostituzione, sè stessa, esisteranno certe r sostituzioni sopra $a_1, a_2, \ldots, a_n$ che trasformeranno ciascuna sostituzione di S in sè stessa. Dunque:

Se G *è un gruppo transitivo sulle lettere* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *e* Γ *è quel suo sottogruppo che ne lascia ferma una lettera, se* $\Gamma \Gamma_1$ *lascia ferme* r *lettere, allora esistono precisamente* r *sostituzioni distinte sopra* $a_1, \ldots, a_n$ *che siano permutabili con tutte quelle di* G: *esse formano un gruppo* K, *e sono della forma*

$$\begin{pmatrix} a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_n} \\ a_1, a_2, \ldots, a_n \end{pmatrix},$$

essendo a_{i_1} *una delle suddette* r *lettere, e* $a_{i_1}, \ldots, a_{i_n}$ *essendo quelle in cui* a_{i_1} *è portata rispettivamente dalle moltiplicatrici* $g_1, \ldots, g_n$ *del quadro* (1).

Si può dimostrare che K *è oloedricamente isomorfo a* I/Γ, *essendo* I *il massimo sottogruppo di* G *che contenga* Γ *come sottogruppo invariante, e che* r *è un divisore di* n; *infine che le lettere lasciate ferme da* Γ_1 *sono tutte quelle in cui le sostituzioni di* I *portano una di esse* a_1.

In particolare, se G è regolare, allora esistono n sostituzioni S, permutabili con tutte quelle di G; esse formano il cosiddetto gruppo *congiunto* di G (altro teorema di Jordan). Abbiamo così estesi ai gruppi transitivi qualsiansi i due notevoli teoremi di Jordan sui gruppi regolari.

Si ricava infine: Se G è abeliano e transitivo, le sole sostituzioni sopra le sue lettere che sieno permutabili con tutte quelle di G, sono le sostituzioni di G stesso (poichè G sarà regolare e coinciderà col proprio congiunto).

Matematica. — *Sopra certe equazioni integrali di Volterra, risolubili con procedimenti finiti.* Nota di FRANCESCO SBRANA, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

1. Il prof. Tedone ha dimostrato che l'equazione integrale

$$\int_0^\xi \varphi(t)\,\mathrm{K}(\xi - t)\,dt = \Phi(\xi)\,, \tag{1}$$

(dove, per semplicità, è supposto $\Phi(0) = 0$), si risolve con procedimento finito se $\mathrm{K}(z)$ coincide con la funzione di Bessel di prima specie e di ordine zero, $J_0(z)$ [1]; e da ciò ha dedotto che la (1) si presta ad una risoluzione simile in molti altri casi, purchè il nucleo si possa esprimere in modo opportuno per mezzo della stessa funzione $J_0(z)$ [2].

In questa Nota ci proponiamo di mostrare che la (1) si risolve con procedimento finito, se $\mathrm{K}(z)$ appartiene ad una classe di funzioni, tra le quali è compresa la citata funzione di Bessel.

2. Supponiamo, dapprima, $\mathrm{K}(z) = \dfrac{e^{cz}}{z^\alpha}$, con c ed α costanti, e $0 < \alpha < 1$; ed osserviamo che

$$\int_t^v \frac{e^{c(v-\xi)}}{(v-\xi)^{1-\alpha}}\,\frac{e^{c(\xi-t)}}{(\xi - t)^\alpha}\,d\xi = \frac{\pi}{\operatorname{sen}\alpha\pi}\,e^{c(v-t)} \text{ [3]}.$$

Moltiplicando, quindi, la (1) per

$$\frac{e^{c(v-\xi)}}{(v-\xi)^{1-\alpha}}\,d\xi\,,$$

ed integrando, tra i limiti zero e v, otteniamo, coll'impiego della formula d'inversione di integrali di Dirichlet,

$$\int_0^v \varphi(t)\,e^{c(v-t)}\,dt = \frac{\operatorname{sen}\alpha\pi}{\pi}\int_0^v \Phi(\xi)\,\frac{e^{c(v-\xi)}}{(v-\xi)^{1-\alpha}}\,d\xi\,;$$

[1] Rend. Lincei, seduta 31 maggio 1913.

[2] Ibid., sedute 5 aprile 1914, e 21 marzo 1915.

[3] Basti ricordare che è

$$\int_t^v \frac{d\xi}{(v-\xi)^{1-\alpha}(\xi - t)^\alpha} = \frac{\pi}{\operatorname{sen}\alpha\pi}\,;$$

cfr. Volterra, *Leçons sur les équations intégrales*, 1913, pag. 37.