# ATTI

DELLA

# REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

ANNO CCCXX

1923

SERIE QUINTA

## RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

**VOLUME XXXII.**

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1923

In particolare, se G è regolare, allora esistono $n$ sostituzioni S, permutabili con tutte quelle di G; esse formano il cosiddetto gruppo *congiunto* di G (altro teorema di Jordan). Abbiamo così estesi ai gruppi transitivi qualsiansi i due notevoli teoremi di Jordan sui gruppi regolari.

Si ricava infine: Se G è abeliano e transitivo, le sole sostituzioni sopra le sue lettere che sieno permutabili con tutte quelle di G, sono le sostituzioni di G stesso (poichè G sarà regolare e coinciderà col proprio congiunto).

**Matematica.** — *Sopra certe equazioni integrali di Volterra, risolubili con procedimenti finiti.* Nota di FRANCESCO SBRANA, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

1. Il prof. Tedone ha dimostrato che l'equazione integrale

$$(1) \qquad \int_0^\xi \varphi(t)\,\mathrm{K}(\xi-t)\,dt = \Phi(\xi),$$

(dove, per semplicità, è supposto $\Phi(0)=0$), si risolve con procedimento finito se $\mathrm{K}(z)$ coincide con la funzione di Bessel di prima specie e di ordine zero, $J_0(z)$ (¹); e da ciò ha dedotto che la (1) si presta ad una risoluzione simile in molti altri casi, purchè il nucleo si possa esprimere in modo opportuno per mezzo della stessa funzione $J_0(z)$ (²).

In questa Nota ci proponiamo di mostrare che la (1) si risolve con procedimento finito, se $\mathrm{K}(z)$ appartiene ad una classe di funzioni, tra le quali è compresa la citata funzione di Bessel.

2. Supponiamo, dapprima, $\mathrm{K}(z)=\dfrac{e^{cz}}{z^\alpha}$, con $c$ ed $\alpha$ costanti, e $0<\alpha<1$; ed osserviamo che

$$\int_t^v \frac{e^{c(v-\xi)}}{(v-\xi)^{1-\alpha}}\,\frac{e^{c(\xi-t)}}{(\xi-t)^\alpha}\,d\xi = \frac{\pi}{\operatorname{sen}\alpha\pi}\,e^{c(v-t)} \ (³).$$

Moltiplicando, quindi, la (1) per

$$\frac{e^{c(v-\xi)}}{(v-\xi)^{1-\alpha}}\,d\xi,$$

ed integrando, tra i limiti zero e $v$, otteniamo, coll'impiego della formula d'inversione di integrali di Dirichlet,

$$\int_0^v \varphi(t)\,e^{c(v-t)}\,dt = \frac{\operatorname{sen}\alpha\pi}{\pi}\int_0^v \Phi(\xi)\,\frac{e^{c(v-\xi)}}{(v-\xi)^{1-\alpha}}\,d\xi\,;$$

(¹) Rend. Lincei, seduta 31 maggio 1913.

(²) Ibid., sedute 5 aprile 1914, e 21 marzo 1915.

(³) Basti ricordare che è

$$\int_t^v \frac{d\xi}{(v-\xi)^{1-\alpha}(\xi-t)^\alpha} = \frac{\pi}{\operatorname{sen}\alpha\pi}\,;$$

cfr. Volterra, *Leçons sur les équations intégrales*, 1913, pag. 37.

da cui, con una derivazione, risulta

$$\varphi(v) = \frac{\operatorname{sen} \alpha\pi}{\pi}\left[\frac{d}{dv} - c\right]\int_0^v \Phi(\xi)\,\frac{e^{c(v-\xi)}}{(v-\xi)^{1-\alpha}}\,d\xi\,.$$

3. Sia ora

$$\text{(2)}\qquad K(z) = \int_0^z \frac{e^{cu}}{u^\alpha}\,\frac{e^{c_1(z-u)}}{(z-u)^{\alpha_1}}\,du\,,$$

con $c$ e $c_1$, $\alpha$ e $\alpha_1$ costanti, queste ultime comprese tra zero ed 1.

Per quanto precede, possiamo esprimere facilmente $\frac{e^{cz}}{z^\alpha}$ per mezzo di $K(z)$; troviamo, così,

$$\frac{e^{cz}}{z^\alpha} = \frac{\operatorname{sen} \alpha_1\pi}{\pi}\left[\frac{d}{dz} - c_1\right]\int_0^z K(u)\,\frac{e^{c_1(z-u)}}{(z-u)^{1-\alpha_1}}\,du\,;$$

ovvero, posto $z = v - t$, $u = \xi - t$,

$$\text{(3)}\qquad \frac{e^{c(v-t)}}{(v-t)^\alpha} = \frac{\operatorname{sen} \alpha_1\pi}{\pi}\left[\frac{\partial}{\partial v} - c_1\right]\int_t^v K(\xi - t)\,\frac{e^{c_1(v-\xi)}}{(v-\xi)^{1-\alpha_1}}\,d\xi\,.$$

Dalla (1) poi, operando come nel caso precedente, segue

$$\int_0^v \varphi(t)\,dt\int_t^v K(\xi - t)\,\frac{e^{c_1(v-\xi)}}{(v-\xi)^{1-\alpha_1}}\,d\xi = \int_0^v \Phi(\xi)\,\frac{e^{c_1(v-\xi)}}{(v-\xi)^{1-\alpha_1}}\,d\xi\,;$$

perciò, con una derivazione, e coll'impiego della (3),

$$\int_0^v \varphi(t)\,\frac{e^{c(v-t)}}{(v-t)^\alpha}\,dt = \frac{\operatorname{sen} \alpha_1\pi}{\pi}\left[\frac{d}{dv} - c_1\right]\int_0^v \Phi(\xi)\,\frac{e^{c_1(v-\xi)}}{(v-\xi)^{1-\alpha_1}}\,d\xi\,.$$

Siamo così ricondotti ad una equazione integrale, nella quale il nucleo è $\frac{e^{cz}}{z^\alpha}$.

Se si attribuiscono convenienti valori alle costanti $c$, $c_1$, $\alpha$ e $\alpha_1$, la funzione (2) si riduce, a meno di un fattore costante, alla funzione $J_o$ di Bessel. È infatti

$$J_0(z) = \frac{1}{\pi}\int_0^z \frac{e^{-i(z-2u)}}{\sqrt{u}\sqrt{z-u}}\,du \quad (^1)\,.$$

4. È chiaro che un procedimento analogo si potrà seguire, per risolvere la (1), quando si supponga

$$K(z) = \int_0^z \frac{e^{c_2(z-u_1)}}{(z-u_1)^{\alpha_2}}\,du_1\int_0^{u_1} \frac{e^{cu}}{u^\alpha}\,\frac{e^{c_1(u_1-u)}}{(u_1-u)^{\alpha_1}}\,du\,,$$

o, più in generale,

$$K(z) = \int_0^z \frac{e^{c_n(z-u_{n-1})}}{(z-u_{n-1})^{\alpha_n}}\,du_{n-1}\int_0^{u_{n-1}} \frac{e^{c_{n-1}(u_{n-1}-u_{n-2})}}{(u_{n-1}-u_{n-2})^{\alpha_{n-1}}}\,du_{n-2}\ldots$$
$$\int_0^{u_1} \frac{e^{cu}}{u^\alpha}\,\frac{e^{c_1(u_1-u)}}{(u_1-u)^{\alpha_1}}\,du\,,$$

dove le costanti $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ sieno comprese tra zero ed 1.

(1) Riemann-Weber, *Part. Diff.-gleich. der math. Physik*, 1er Bd., ediz. 1919, § 75, formula (3).