ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE
DEI LINCEI

ANNO CCCXX

1923

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXXII.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1923

Fisica matematica. — *Sulla massa della radiazione in uno spazio vuoto.* Nota di E. FERMI ed A. PONTREMOLI, presentata dal Socio O. M. CORBINO.

Recentemente uno di noi [1] ebbe a dimostrare, introducendo un più esatto concetto della rigidità, come l'elettrodinamica ordinaria consenta di giungere alla determinazione della massa di riposo di un elettrone non diversa da quella attribuitagli secondo la teoria della relatività, e che, come è noto, si ottiene semplicemente dividendo per il quadrato della velocità della luce l'energia del sistema.

Abbiamo osservato che una simile differenza, tra il valore determinato secondo l'elettrodinamica ordinaria o colla relatività, si presenta nel calcolo della massa della radiazione di uno spazio vuoto [2], e ci proponiamo di dimostrare che questo divario può eliminarsi mediante analoghe considerazioni.

Il procedimento sinora seguìto per determinare colla elettrodinamica la massa della radiazione in una cavità consisteva anzitutto nel calcolare l'impulso elettromagnetico G_0 per moti lenti e quasi stazionari, che risulta espresso [3], trascurando termini in $\frac{v^2}{c^2}$, da

$$G_0 = \frac{4}{3}\frac{W_0}{c^2}v\,,$$

dove W_0 è l'energia della radiazione allo stato di quiete, v è la velocità attuale della cavità, c è la velocità della luce. Da questo si deduceva che la reazione di inerzia è

$$-\frac{dG_0}{dt} = -\frac{4}{3}\frac{W_0}{c^2}\boldsymbol{\Gamma}\,.$$

dove $\boldsymbol{\Gamma}$ è l'accelerazione; donde una massa apparente della radiazione eguale a $\frac{4}{3}\frac{W_0}{c^2}$, mentre, secondo la teoria della relatività, essa dovrebbe essere semplicemente $\frac{W_0}{c^2}$.

In questo procedimento è contenuta implicitamente l'asserzione che la forza esterna F sia eguale alla derivata dell'impulso elettromagnetico ri-

(1) E. Fermi, questi Rendiconti, vol. XXXI (1922), pp. 184 e 306; Physikalische Zeit., vol. XXIII (1922), pag. 340.

(2) F. Hasenöhrl, Ann. der Physik, vol. XV (1904), pag. 344, e vol. XVI (1905), pag. 589; K. von Mosengeil, Ann. der Physik, vol. XXII (1907), pag. 867; M. Planck, Berlin. Sitzber. (1907), pag. 542; M. Abraham, *Theorie der Elektrizität*, vol. II (1920), pag. 341.

(3) M. Abraham; loc. cit., pag. 345.

spetto al tempo, cioè alla somma vettoriale delle forze elettromagnetiche $d\varphi$ agenti sopra le singole parti del sistema; con ciò si viene a porre dunque:

$$F = \int d\varphi \,. \tag{1}$$

Ma ciò non è esatto, perchè, se si tiene conto della nozione di corpo rigido discussa da uno di noi nel lavoro citato, la forza esterna è data invece dalla relazione

$$F = \int d\varphi \left[1 + \frac{\Gamma \times (P - O)}{c^2} \right] \tag{2}$$

essendo $(P - O)$ il vettore che ha termine nel punto P cui è applicata la forza $d\varphi$ ed origine in un punto fisso O, che possiamo prendere per centro delle coordinate, interno al sistema.

Ora, $d\varphi$ è la risultante della forza $d\varphi_1$ esercitata dalla pressione di radiazione che sussisterebbe se la cavità fosse ferma, e di una forza $d\varphi_2$ causata dalle perturbazioni di detta pressione, dovute al moto della cavità. Applicando la formula (1), si trova che, essendo evidentemente $\int d\varphi_1 = 0$, perchè $d\varphi_1$ è la forza esercitata da una pressione omogenea sopra una superficie chiusa, la forza esterna è

$$F = \int d\varphi_2 \,. \tag{3}$$

Questa forza è precisamente quella calcolata come reazione d'inerzia dagli autori citati, onde

$$\int d\varphi_2 = -\frac{4}{3} \frac{W_0}{c^2} \Gamma. \tag{4}$$

Invece per la formula (2), tenendo ancora presente che $\int d\varphi_1 = 0$, si trova

$$F = \int (d\varphi_1 + d\varphi_2) \left[1 + \frac{\Gamma \times (P - O)}{c^2} \right]$$

$$= \int d\varphi_1 \frac{\Gamma \times (P - O)}{c^2} + \int d\varphi_2 + \int d\varphi_2 \frac{\Gamma \times (P - O)}{c^2} \,.$$

Trascurando i termini in Γ^2 ed osservando che $d\varphi_2$ è proporzionale a Γ, si può porre semplicemente

$$F = \int d\varphi_1 \frac{\Gamma \times (P - O)}{c^2} + \int d\varphi_2 \,. \tag{5}$$

La differenza tra (3) e (5) non è *a priori*, in questo caso, trascurabile, benchè contenga c^2 al denominatore, potendo $\frac{d\varphi_1}{d\varphi_2}$ divenire molto grande, come rapporto tra una forza e la sua perturbazione [1]. Infatti è $d\varphi_1 = pn\, d\sigma$, dove p è la pressione di radiazione eguale, come è noto, ad $\frac{1}{3}\frac{W_0}{V}$, V è il volume della cavità, n è un vettore unitario colla direzione della normale esterna relativa all'elemento $d\sigma$, di coordinate (x, y, z), della superficie della cavità.

La componente sull'asse x del primo integrale di (5) è dunque

$$\left[\int d\varphi_1 \frac{\boldsymbol{\Gamma} \times (\mathrm{P}-\mathrm{O})}{c^2}\right]_x = \frac{W_0}{3c^2 V}\int (\boldsymbol{\Gamma}_x x + \boldsymbol{\Gamma}_y y + \boldsymbol{\Gamma}_z z) \cos \widehat{nx}\, d\sigma$$

$$= \frac{W_0}{3c^2 V}\left[\boldsymbol{\Gamma}_x \int x \cos \widehat{nx}\, d\sigma + \boldsymbol{\Gamma}_y \int y \cos \widehat{nx}\, d\sigma + \right.$$

$$\left. + \boldsymbol{\Gamma}_z \int z \cos \widehat{nx}\, d\sigma \right];$$

ma l'immediata applicazione del teorema di Gauss dimostra che

$$\int x \cos \widehat{nx}\, d\sigma = V \quad , \quad \int y \cos \widehat{nx}\, d\sigma = \int z \cos \widehat{nx}\, d\sigma = 0 .$$

La nostra componente è perciò $\frac{W_0 \boldsymbol{\Gamma}_x}{3c^2}$ e quindi

$$\int d\varphi_1 \frac{\boldsymbol{\Gamma} \times (\mathrm{P}-\mathrm{O})}{c^2} = \frac{W_0}{3c^2}\boldsymbol{\Gamma} .$$

Tenendo presente questa relazione e la (4), si vede che il rapporto tra gl'integrali del secondo membro della (5) è $-1/4$ e quindi effettivamente non trascurabile.

Sostituendo questi valori nella (5), si trova

$$\mathrm{F} = -\frac{W_0}{c^2}\boldsymbol{\Gamma} ,$$

da cui la richiesta massa di quiete risulta, conformemente al principio di relatività, eguale a $\frac{W_0}{c^2}$.

[1] Nel caso delle masse elettromagnetiche si ha $d\varphi$ eguale alla somma delle forze di Coulomb (che formano la parte preponderante) e delle forze dovute alla accelerazione. Per le prime vale evidentemente anche in questo caso la relazione $\int d\varphi_1 = 0$; ancor esse quindi fanno sentire il loro effetto solo ove si applichi la formula (5) anzichè la (3).