

ATTI
DELLA
REALE ACCADEMIA NAZIONALE
DEI LINCEI

ANNO CCCXX
1923

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXXII.

1° SEMESTRE.



ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1923

Matematica. — *Soluzione di qualche tipo di equazioni integro-differenziali ad indice qualunque.* Nota del prof. PRO SCATIZZI S. J., presentata dal Socio V. VOLTERRA.

1. Le formole di Letnikof-Laurent-Molinari ⁽¹⁾ che servono ad ottenere la derivata ad indice qualunque, positivo e negativo, suggeriscono l'idea di un metodo interessante e rapido, per risolvere certe determinate classi di equazioni integro-differenziali del medesimo indice. Liouville ⁽²⁾ fu il primo a trattarne con successo, in occasione di problemi fisico-matematici; stimo quindi opportuno proporre qualche altro caso più generale, che verrà ridotto

quindi, tenendo presente l'equazione dell'orbita,

$$\sigma \times v_0 = -\frac{\mu \cos \beta}{p} [e \sin(\lambda - \omega) + \sin(\lambda - \Theta)] .$$

Scritta allora la (7)

$$(V) \partial \sigma = \sigma \times v_0 \cdot \sigma - v_0 ,$$

con che si attribuisce a $\partial \sigma$ il significato di correzione additiva da applicare a σ per avere s . e notando che nella differenziazione ∂ si debbono riguardare i vettori $\mathbf{l}, \mathbf{n}, \mathbf{q}$ e così pure le quantità λ e Θ come costanti, troviamo, dopo aver posto $\sigma \times v_0 = K$, che la equazione vettoriale si scinde nelle tre fra $\partial \lambda$ e $\partial \beta$

$$\begin{aligned} -(V) [\sin \beta \cos(\lambda - \Theta) \partial \beta + \cos \beta \sin(\lambda - \Theta) \partial \lambda] &= \\ &= K \cos \beta \cos(\lambda - \Theta) + \mu e/p \sin(\Theta - \omega) \\ -(V) [\sin \beta \sin(\lambda - \Theta) \partial \beta - \cos \beta \cos(\lambda - \Theta) \partial \lambda] &= \\ &= K \cos \beta \sin(\lambda - \Theta) + \mu/p [1 + e \cos(\Theta - \omega)] \\ (V) \cos \beta \partial \beta &= K \sin \beta \end{aligned}$$

evidentemente compatibili, perchè, essendo $\sigma^2 = 1$, ha luogo, anche nel caso generale, la identità

$$(V) \sigma \times \partial \sigma = [\sigma \times v_0 \cdot \sigma - v_0] \times \sigma = 0 ,$$

che mette in evidenza una relazione lineare fra le tre equazioni. Risolte queste rispetto a $\partial \lambda$ e $\partial \beta$ si ottengono le usuali espressioni

$$\begin{aligned} \cos \beta \partial \lambda &= k \{ \cos(\lambda - \Theta) + e \cos(\lambda - \omega) \} \\ \partial \beta &= -k \sin \beta \{ \sin(\lambda - \Theta) + e \sin(\lambda - \omega) \} , \end{aligned}$$

dove k indica la costante dell'aberrazione annua $\mu : p(V)$, le quali rappresentano le correzioni da applicare alle posizioni aberrate.

⁽¹⁾ A. Molinari, *Derivazione ad indice qualunque*. Rend. R. Acc. dei Lincei, vol. XXV, ser. 5^a, 2^o sem., fasc. 7^o e 8^o, Roma 1916.

Cfr. G. Giorgi, *Sul calcolo delle soluzioni funzionali originate dai problemi di elettrodinamica*. Atti dell'Assoc. Elettrotecnica italiana, vol. IX, fasc. 6^o, dicembre 1905, pp. 651-690.

⁽²⁾ Cfr. Memorie contenute nel XXI «cahier» del giornale l'École Polytechnique (1832-1837).

a forme già studiate in una Nota precedente ⁽¹⁾. Richiamo anzitutto qui le suddette formole della sig.na Angela Molinari, necessarie alla soluzione esplicita delle equazioni suaccennate:

$$[1] \quad \begin{aligned} D^{-n} f(x) &= \int_{-\infty}^x \frac{(x-\xi)^{n-1}}{\Gamma(n)} f(\xi) d\xi, \\ D^n f(x) &= \frac{d^n}{dx^n} \int_{-\infty}^x \frac{(x-\xi)^{m-1}}{\Gamma(m)} f(\xi) d\xi, \end{aligned}$$

essendo $n = -m + N$, con N minimo intero non inferiore ad m . La $f(x)$ deve supporre tale che risultino convergenti gli integrali ai secondi membri.

In generale intenderemo operare in quel campo funzionale in cui le operazioni sono legittime; ad ogni modo verrà, per maggior sicurezza, discussa la convergenza degli integrali in qualche caso particolare.

2. La prima equazione, a nucleo del ciclo chiuso, è la seguente:

$$[2] \quad \varphi(x) = u(x) + \int_{-\infty}^x \sqrt{x-\xi} D^m u(\xi) d\xi.$$

Avendo presente le [1], s'intenderanno facilmente i successivi passaggi

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= u(x) + \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \int_{-\infty}^x \frac{\sqrt{x-\xi}}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} D^m u(\xi) d\xi, \\ \varphi(x) &= u(x) + \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) D^{-\frac{3}{2}+m} u(x), \\ \frac{1}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} \varphi(x) &= \frac{1}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} u(x) + D^{(m-1)-\frac{1}{2}} u(x). \end{aligned}$$

Equazione del tipo II, come risulta dalla mia Nota suddetta, della forma

$$(\alpha) \quad D^{m-\frac{1}{2}} y = k y + \psi(x),$$

essendo k costante.

Valendoci dunque della soluzione data per tale equazione, avremo per il nostro caso:

$$u(x) = F(x) C_1 \dots C_{2N-3} + \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \frac{d^{N-1}}{dx^{N-1}} \int_{-\infty}^x \frac{(x-\xi)^{-\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} - F(\xi) C_1 \dots C_{2N-3} d\xi.$$

F è l'integrale generale dell'equazione dedotta dalla (α) , ad indice intero $2N-3$.

⁽¹⁾ P. Scatizzi S. J., *Soluzione di qualche tipo di equazione differenziale ad indice qualunque*. Rend. R. Acc. dei Lincei, vol. XXXI, ser. 5^a, 2^o sem., fasc. 1^o e 2^o, Roma 1922.

Per ciò che riguarda la convergenza dell'integrale a secondo membro, potremo riferirci al caso per $N = 2$, in cui la F viene rappresentata allora dalla soluzione di un'equazione differenziale lineare; scegliendo la costante uguale a zero, si otterrà

$$u(x) = e^{-\frac{x}{\Gamma^2(\frac{3}{2})}} \int \frac{\varphi(x)}{\Gamma(\frac{1}{2})} e^{\frac{x}{\Gamma^2(\frac{3}{2})}} dx + \\ + \Gamma(\frac{3}{2}) \frac{d}{dx} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-\xi)^{-\frac{1}{2}}}{\Gamma(\frac{1}{2})} e^{-\frac{\xi}{\Gamma^2(\frac{3}{2})}} \left[\int \frac{\varphi(\xi)}{\Gamma(\frac{1}{2})} e^{\frac{\xi}{\Gamma^2(\frac{3}{2})}} d\xi \right] d\xi.$$

Con la trasformazione $x - \xi = s$, ci renderemo meglio conto della necessità di assumere per la costante un tal valore nullo. Altrimenti, infatti, il prodotto

$$c \int_{-\infty}^x (x-\xi)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{\xi}{\Gamma^2(\frac{3}{2})}} d\xi = c \int_0^{\infty} \frac{e^s ds}{e^{\frac{x}{\Gamma^2(\frac{3}{2})}} e^{\frac{s}{\Gamma^2(\frac{3}{2})}}} = \frac{c}{e^{\frac{x}{\Gamma^2(\frac{3}{2})}}} \left[e^s \left(\frac{1}{\sqrt{s}} + \frac{1}{2\sqrt{s^3}} + \frac{3}{4\sqrt{s^5}} \dots \right) \right]_0^{\infty}$$

risulterebbe infinito ai due limiti. D'altra parte

$$\int \varphi(\xi) e^{\frac{\xi}{\Gamma^2(\frac{3}{2})}} d\xi = \int \varphi(x-s) \frac{e^{\frac{x-s}{\Gamma^2(\frac{3}{2})}}}{e^{\frac{x}{\Gamma^2(\frac{3}{2})}}} ds = \frac{e^{\frac{x}{\Gamma^2(\frac{3}{2})}}}{e^{\frac{x}{\Gamma^2(\frac{3}{2})}}} \left(\varphi(x-s) - \varphi'(x-s) + \varphi''(x-s) \dots \right).$$

Quindi tutto intero il secondo termine della $u(x)$ si potrà scrivere:

$$\Gamma(\frac{3}{2}) \frac{d}{dx} \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{s}} \varphi^{(r)}(x-s) ds.$$

Avendo a nostra disposizione la φ , sarà possibile trovare dei casi in cui converga ciascun integrale, ed anche la corrispettiva serie maggiorante.

3. Seconda equazione:

$$[3] \quad \varphi(x) = \psi(x) D^{\frac{\mu}{\lambda} + N} u(x) + \chi(x) \int_{-\infty}^x (x-\xi)^{\frac{\mu}{\lambda}} D^{N+M+2\frac{\mu}{\lambda}} u(\xi) d\xi.$$

Le φ, ψ, χ sono funzioni arbitrarie della sola x ; $\frac{\mu}{\lambda} < 1$, N ed M interi qualunque. Per cose note, tale equazione si riduce immediatamente alla forma:

$$\varphi(x) = \psi(x) D^{\frac{\mu}{\lambda} + N} u(x) + \chi(x) \Gamma\left(\frac{\mu}{\lambda} + 1\right) D^{\frac{\mu}{\lambda} + N + M - 1} u(x).$$

Con la trasformazione poi

$$[4] \quad u(x) = D^{-\frac{\mu}{\lambda} - N} \Phi(x)$$

si riduce subito ad indice intero; avremo cioè l'equazione

$$q(x) = \psi(x) \Phi(x) + \chi(x) \Gamma\left(\frac{\mu}{\lambda} + 1\right) D^{M-1} \Phi(x),$$

il cui integral generale, che supporremo espresso con $F(x, C, \dots, C_{M-1})$, sostituito nella [4], ci rende, a norma della [1], la soluzione cercata.

Casi particolari interessanti si ottengono per valori di $M = 2, 1$, qualunque sieno N intero e $\frac{\mu}{\lambda} < 1$.

Si ha infatti nel primo caso la soluzione

$$u(x) = \int_{-\infty}^x \frac{(x-\xi)^{\frac{\mu}{\lambda} + N - 1}}{\Gamma\left(\frac{\mu}{\lambda} + N\right)} e^{-\int \frac{\psi(\xi) d\xi}{\Gamma\left(\frac{\mu}{\lambda} + N\right) \chi(\xi)}} \times \\ \times \left\{ C + \int \frac{q(\xi)}{\Gamma\left(\frac{\mu}{\lambda} + N\right) \chi(\xi)} e^{\int \frac{\psi(\xi) d\xi}{\Gamma\left(\frac{\mu}{\lambda} + N\right) \chi(\xi)}} d\xi \right\},$$

e nel secondo

$$u(x) = \int_{-\infty}^x \frac{(x-\xi)^{N + \frac{\mu}{\lambda} - 1}}{\Gamma\left(N + \frac{\mu}{\lambda}\right)} \frac{q(\xi) d\xi}{\Gamma\left(N + \frac{\mu}{\lambda}\right) \chi(\xi) - \psi(\xi)}.$$

In cui si vede che l'arbitrarietà delle funzioni q, ψ, χ , le quali figurano ai secondi membri, assicurano praticamente la convergenza.

4. Una terza equazione si riannoda alla soluzione del tipo I nella Nota suaccennata, ed è la seguente:

$$[5] \quad q_1(x) D^{n_1} u(x) + q_2(x) D^{n_2} u(x) + \dots + q_{n-1}(x) D^{n_{n-1}} u(x) = \\ = q_n(x) \int_{-\infty}^x \frac{(x-\xi)^{m-1}}{\Gamma(m)} D^{n_v} u(\xi) d\xi$$

con $n_v = -m + M_v$, M_v minimo intero non inferiore ad n_v , che include la condizione

$$n_r - n_s = N_r \text{ intero}, [r = 0, 1, 2 \dots (s-1)(s+1) \dots v]$$

L'integral generale si dedurrà con opportuna trasformazione, simile alla [4], esplicitata poi dalla [1].

5. Ritenendo per n, m ed N lo stesso significato, i criterî suesposti aprono infine agevolmente la via alla soluzione di tutto un gruppo di equazioni integro-differenziali, che si riallacciano, mediante la solita trasformazione, alle più comuni equazioni differenziali ordinarie. Così per esempio le due seguenti:

$$[6] \quad \varphi_1(x) + \varphi_2(x) D^n u(x) + \varphi_3(x) [D^n u]^2 = \int_{-\infty}^x \frac{(x-\xi)^{m-1}}{\Gamma(m)} D^{n+1} u(\xi) d\xi$$

$$[7] \quad \varphi_1(x) [D^n u(x)]^m + \varphi_2(x) D^n u(x) = \int_{-\infty}^x \frac{(x-\xi)^{m-1}}{\Gamma(m)} D^{n+1} u(\xi) d\xi$$

con M intero e le φ arbitrarie, si riducono a quelle di Riccati e Bernoulli.

Similmente l'equazione I. D. del tipo Abel

$$[8] \quad \varphi(x) - \psi(x) + \varphi(x) D^n y + 3\psi(x) [D^n y]^2 + \psi(x) [D^n y]^3 = \\ = \int_{-\infty}^x \frac{(x-\xi)^{m-1}}{\Gamma(m)} D^{n+1} u(\xi) d\xi,$$

come consta da Nota precedente ⁽¹⁾, si risolve completamente per

$$u(x) = \int_{-\infty}^x \frac{(x-\xi)^{n-1}}{\Gamma(n)} \frac{e^{\int [\varphi(\xi) - 3\psi(\xi)] d\xi}}{\sqrt{K - 2 \int \psi(\xi) e^{2 \int [\varphi(\xi) - 3\psi(\xi)] d\xi} d\xi}} d\xi$$

con K costante d'integrazione.

6. Noto da ultimo, che i medesimi mezzi ci consentono implicitamente la soluzione dell'equazione

$$[9] \quad \varphi(x) = \psi_1(x) D^{-n} u(x) + \int_{-\infty}^x \Phi(x-\xi) D^m u(\xi) d\xi,$$

$$\text{per } \Phi(x-\xi) = \sum_{s=2}^v \psi_s^{(a)} \frac{(x-\xi)^{m+N_s}}{\Gamma(m+N_s+1)}$$

e con richiamo alla prima formola delle [1], badando che $n_r = m + N_r - M$, ($r = 2, 3, \dots, v$).

⁽¹⁾ Cfr. P. Scatizzi S. J., *Soluzione di alcune equazioni differenziali del tipo di Abel* (Rend. Acc. dei Lincei, vol. XXVI, ser. 5ª, 2º sem., fasc. 3º, Roma, 1917); al Tipo IV.