ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

ANNO CCCXX

1923

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXXII.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1923

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 4 marzo 1923.

V. VOLTERRA, Vicepresidente.

MEMORIE E NOTE DI SOCI

Matematica. — *Sopra una proprietà cinematica che caratterizza le superficie W.* Nota del Socio LUIGI BIANCHI.

1.

Il celebre teorema di Weingarten identifica la ricerca delle superficie W (superficie i cui raggi principali di curvatura sono legati da una relazione) colla ricerca delle superficie applicabili sopra superficie di rotazione.

La proprietà di cui tratta la presente Nota, e colla quale vogliamo caratterizzare cinematicamente le superficie W (ossia le deformate per flessione delle superficie di rotazione), si riferisce ad una *losanga sghemba*, di lato in generale variabile, suscettibile di assumere una *doppia* infinità di posizioni nello spazio, per modo che le quattro superficie luogo dei quattro vertici abbiano, ciascuna, per piano tangente il piano dei due lati della losanga che vi concorrono, o come diremo la corrispondente faccia della losanga.

In altri termini, domandiamo di trovare tutte le possibili quaderne (S_1, S_2, S_3, S_4) di superficie, con corrispondenza di punto a punto, in guisa che, essendo M_1, M_2, M_3, M_4 quattro punti generici corrispondenti:

Il quadrilatero $M_1 M_2 M_3 M_4$ *abbia i quattro lati* $M_1 M_2$, $M_2 M_3$, $M_3 M_4$, $M_4 M_1$ *eguali, e la superficie* S_i *luogo del vertice* M_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ *sia toccata dai lati ivi concorrenti.*

2.

Cominciamo intanto, supposte soddisfatte queste condizioni, a dedurne elementarmente alcune conseguenze, immediate per la simmetria della losanga variabile.

Le due normali nei vertici opposti M_1, M_3 alle superficie S_1, S_3, cioè le normali alle facce $M_1M_2M_4$, $M_3M_2M_4$ della losanga, s'incontrano in un punto F_1 equidistante da M_1, M_3, onde descrivendo la sfera di centro F_1 e raggio $F_1M_1 = F_1M_3$, questa tocca in M_1 la S_1, in M_3 la S_3. Perciò, se con Σ_1 indichiamo la superficie luogo di F_1, avremo una doppia infinità di sfere delle quali sarà Σ_1 la superficie luogo dei centri, mentre S_1, S_3 saranno le due falde dell'inviluppo. Segue allora, da note proprietà degli inviluppi di sfere, che il piano tangente in F_1 alla Σ_1 è il piano normale alla *diagonale* M_1M_3 nel suo punto medio, che diremo P, e passa quindi per l'altra diagonale M_2M_4; questo piano $F_1M_2M_4$ è il primo piano di simmetria della losanga. Similmente le normali in M_2, M_4 alle S_2, S_4 si incontrano in un punto F_2 (equidistante da M_2, M_4), e la superficie Σ_2 luogo di F_2 ha per piano tangente in F_2 il secondo piano di simmetria $F_2M_1M_3$ della losanga, che è normale alla diagonale M_2M_4 nel suo punto medio Q. Si vede dunque che la congiungente PQ i punti medii delle diagonali M_1M_3, M_2M_4 tocca in F_1 la Σ_1, in F_2 la Σ_2, per cui Σ_1, Σ_2 sono le due falde focali della congruenza (PQ) generata dalla retta PQ. Ma inoltre i due piani tangenti a Σ_1, Σ_2, come piani di simmetria della losanga, si tagliano ortogonalmente lungo F_1F_2 e perciò la congruenza rettilinea (PQ) è una congruenza *normale*. Vediamo dunque intanto che:

Se la losanga $M_1M_2M_3M_4$ *assume una doppia infinità di configurazioni soddisfacente alle condizioni supposte, la congiungente* PQ *i punti medii delle diagonali* M_1M_3, M_2M_4 *descrive una congruenza normale.*

3.

Se per le deduzioni precedenti sono bastate considerazioni geometriche elementari, converrà ora, per le ulteriori, ricorrere al calcolo. Cominciamo dal provare la proposizione fondamentale:

Le superficie ortogonali alla congruenza rettilinea (PQ), *generata dalla congiungente i punti medii delle diagonali della losanga mobile supposta, sono superficie* W. *ossia le due falde* Σ_1, Σ_2 *dell'evoluta sono applicabili sopra superficie* (*complementari*) *di rotazione.*

Per stabilire questa proprietà prendiamo a superficie di partenza una superficie S ortogonale ai raggi PQ e riferiamola alle sue linee di curvatura (u, v). Indicando con $M \equiv (x, y, z)$ un punto generico di S, manteniamo pei nove coseni di direzione del triedro principale di S, col vertice in M, le consuete notazioni e ricorriamo alle formole del solito quadro:

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial u} = \sqrt{E}\, X_1 , \quad \dfrac{\partial X_1}{\partial u} = -\dfrac{1}{\sqrt{G}} \dfrac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} X_2 - \dfrac{\sqrt{E}}{r_2} X_3 , \\ \qquad\qquad \dfrac{\partial X_2}{\partial u} = \dfrac{1}{\sqrt{G}} \dfrac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} X_1 , \quad \dfrac{\partial X_3}{\partial u} = \dfrac{\sqrt{E}}{r_2} X_1 \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} = \sqrt{G}\, X_2 , \quad \dfrac{\partial X_1}{\partial v} = \dfrac{1}{\sqrt{E}} \dfrac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} X_2 , \\ \qquad\qquad \dfrac{\partial X_2}{\partial v} = -\dfrac{1}{\sqrt{E}} \dfrac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} X_1 - \dfrac{\sqrt{G}}{r_1} X_3 , \quad \dfrac{\partial X_3}{\partial v} = \dfrac{\sqrt{G}}{r_1} X_2 . \end{cases}$$

Scriviamo le coordinate dei due centri principali di curvatura $F_1 \equiv \equiv (\xi_1 , \eta_1 , \zeta_1)$, $F_2 \equiv (\xi_2 , \eta_2 , \zeta_2)$):

$$(2)\qquad \xi_1 = x - r_1 X_3 , \quad \xi_2 = x - r_2 X_3 , \text{ ecc.};$$

e denotando poi con (x_1 , y_1 , z_1) le coordinate del primo vertice M_1 della losanga, e similmente per gli altri tre, potremo porre

$$(3)\qquad \begin{cases} x_1 = x + M X_2 + B X_3 \\ x_3 = x - M X_2 + B X_3 \end{cases}$$

$$(3^\star)\qquad \begin{cases} x_2 = x + L X_1 + A X_3 \\ x_4 = x - L X_1 + A X_3 , \end{cases}$$

con formole analoghe per gli altri due assi. Qui $A , B ; L , M$ denotano quattro funzioni di u , v, che dobbiamo assoggettare alle condizioni geometriche del problema; e precisamente A , B sono le ascisse, misurate sulla normale alla S a partire dal piede, dei punti medii Q , P delle diagonali $M_2 M_4$, $M_1 M_3$, mentre $2L$, $2M$ dànno le lunghezze di queste diagonali.

Basta ora scrivere le condizioni di normalità delle congiungenti $F_1 M_1$, $F_1 M_3$; $F_2 M_2$, $F_2 M_4$ alle quattro facce della losanga e si ottengono le due relazioni:

$$(\mathrm{I})\qquad \begin{cases} L^2 = (B - A)(A + r_2) \\ M^2 = (A - B)(B + r_1) , \end{cases}$$

restando così da determinare le due sole funzioni incognite A , B.

4.

Oltre a queste relazioni algebriche bisogna ora calcolare quelle differenziali che risultano, secondo i dati del problema, dall'esprimere che le quattro superficie S_1 , S_2 , S_3 , S_4 debbono essere tangenti alle quattro facce della losanga. Per questo calcoliamo dalle (3), (3*) le derivate di x_1, x_3, il che dà, per le (1), le formole:

$$\left\{\begin{aligned}
\frac{\partial x_1}{\partial u} &= \left(\sqrt{E} + \frac{B\sqrt{E}}{r_2} + \frac{M}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\right)X_1 + \frac{\partial M}{\partial u}X_2 + \frac{\partial B}{\partial u}X_3 \\
\frac{\partial x_1}{\partial v} &= -\frac{M}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}X_1 + \left(\sqrt{G} + B\frac{\sqrt{G}}{r_1} + \frac{\partial M}{\partial v}\right)X_2 + \left(\frac{\partial B}{\partial v} - M\frac{\sqrt{G}}{r_1}\right)X_3
\end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned}
\frac{\partial x_3}{\partial u} &= \left(\sqrt{E} + \frac{A\sqrt{E}}{r_2} + \frac{\partial L}{\partial u}\right)X_1 - \frac{L}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}X_2 + \left(\frac{\partial A}{\partial u} - L\frac{\sqrt{E}}{r_2}\right)X_3 \\
\frac{\partial x_3}{\partial v} &= \frac{\partial L}{\partial v}X_1 + \left(\sqrt{G} + \frac{A\sqrt{G}}{r_1} + \frac{L}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\right)X_2 + \frac{\partial A}{\partial v}X_3,
\end{aligned}\right.$$

mentre per le derivate di x_2, x_4 basterà, nelle formole superiori, cangiare di segno M, L. Se si esprimono le dette condizioni d'ortogonalità, si trovano le quattro relazioni differenziali

$$\left\{\begin{aligned}
A\frac{\partial A}{\partial u} + L\frac{\partial L}{\partial u} + r_2\frac{\partial A}{\partial u} &= 0 \\
A\frac{\partial A}{\partial v} + L\frac{\partial L}{\partial v} + r_2\frac{\partial A}{\partial v} &= 0 \\
B\frac{\partial B}{\partial u} + M\frac{\partial M}{\partial u} + r_1\frac{\partial B}{\partial u} &= 0 \\
B\frac{\partial B}{\partial v} + M\frac{\partial M}{\partial v} + r_1\frac{\partial B}{\partial v} &= 0;
\end{aligned}\right.$$

e queste, insieme alle (I), esprimono tutte le condizioni necessarie e sufficienti del problema.

Se scriviamo le precedenti sotto la forma equivalente

$$\left\{\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial u}(A^2 + L^2) + 2r_2\frac{\partial A}{\partial u} &= 0 \\
\frac{\partial}{\partial v}(A^2 + L^2) + 2r_2\frac{\partial A}{\partial v} &= 0 \\
\frac{\partial}{\partial u}(B^2 + M^2) + 2r_1\frac{\partial B}{\partial u} &= 0 \\
\frac{\partial}{\partial v}(B^2 + M^2) + 2r_1\frac{\partial B}{\partial v} &= 0,
\end{aligned}\right.$$

escludendo il caso ovvio di superficie canali con r_2 (o r_1) costante, ne risulta subito che A, L debbono essere funzioni di r_2, e similmente B, M di r_1. Ma allora dalle (I) segue che r_1, r_2 sono funzioni l'uno dell'altro, e perciò: *la superficie* S *è una superficie* W, come si è asserito al n. 2.

5.

L'analisi precedente permette d'invertire la ricerca partendo da una qualunque superficie S i cui raggi principali di curvatura r_1, r_2 siano funzioni l'uno dell'altro e di un medesimo parametro α. Cerchiamo di determinare le quattro funzioni A, B, L, M del parametro α in modo da soddisfare a tutte le condizioni del problema, e cioè alle (I) ed insieme alle equazioni differenziali

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{d}{d\alpha}(A^2+L^2)+2r_2\frac{dA}{d\alpha}=0\\ &\frac{d}{d\alpha}(B^2+M^2)+2r_1\frac{dB}{d\alpha}=0\,. \end{aligned}\right.$$

Eliminando, colle (I), L^2, M^2 si hanno per A, B le equazioni

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned} &(B+r_1)\frac{dA}{d\alpha}+(A+r_1)\frac{dB}{d\alpha}=(B-A)\frac{dr_1}{d\alpha}\\ &(B+r_2)\frac{dA}{d\alpha}+(A+r_2)\frac{dB}{d\alpha}=(A-B)\frac{dr_2}{d\alpha} \end{aligned}\right.$$

che possiamo risolvere rispetto a $\frac{dA}{d\alpha}$, $\frac{dB}{d\alpha}$, osservando che il determinante

$$(B+r_1)(A+r_2)-(A+r_1)(B+r_2)=(A-B)(r_1-r_2)$$

eguaglia l'espressione

$$(A-B)^2+L^2+M^2\,,$$

il cui valore è il quadrato δ^2 del lato della losanga. Così otteniamo le equazioni differenziali lineari:

$$(4^*)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{dA}{d\alpha}=\frac{1}{r_2-r_1}\,\frac{d(r_1+r_2)}{d\alpha}\,A+\frac{1}{r_2-r_1}\,\frac{d(r_1\,r_2)}{d\alpha}\\ &\frac{dB}{d\alpha}=\frac{1}{r_1-r_2}\,\frac{d(r_1+r_2)}{d\alpha}\,B+\frac{1}{r_1-r_2}\,\frac{d(r_1\,r_2)}{d\alpha}\,, \end{aligned}\right.$$

e con quadrature abbiamo le funzioni A, B nelle quali restano due costanti arbitrarie. Se ne conclude:

Ad ogni superficie W, *arbitrariamente data, si può coordinare (in una doppia infinità di modi) una serie* ∞^2 *di losanghe sghembe soddisfacenti alle condizioni del problema.*

Possiamo poi pensare la losanga variabile coordinata, anzichè all'evolvente W, alle due falde Σ_1, Σ_2 dell'evoluta applicabili sopra superficie (complementari) di rotazione. Si nota allora che tutti gli elementi della losanga, come funzioni di α, sono invariabili lungo le deformate dei paralleli, e perciò:

La losanga sghemba resta invariabilmente collegata alla superficie Σ_1 *(o alla complementare* Σ_2*) quando questa si deforma per flessione.*

6.

Prendiamo ora a considerare le quattro congruenze rettilinee generate dai quattro lati della losanga, nelle quali riscontreremo alcune proprietà metriche notevoli. La prima è data dal teorema:

Le quattro congruenze generate dai lati della losanga hanno (lo stesso) parametro medio costante H ([1]).

Per dimostrarlo ricorriamo alla formola già sopra stabilita per la distanza δ dei fuochi (lato della losanga) data da

$$\delta^2 = (A - B)(r_1 - r_2),$$

e calcoliamo anche l'angolo σ dei due piani focali coll'osservare che i coseni di direzione delle normali $F_1 M_1$, $F_2 M_2$ alle superficie S_1, S_2 sono dati dalle due espressioni

$$\frac{M X_2 + (B + r_1) X_3}{\sqrt{M^2 + (B + r_1)^2}}, \quad \frac{L X_1 + (A + r_2) X_3}{\sqrt{L^2 + (A + r_2)^2}}$$

e dalle altre analoghe per gli altri due assi. Così calcoliamo

$$\cos^2 \sigma = \frac{(B + r_1)^2 (A + r_2)^2}{\{M^2 + (B + r_1)^2\} \cdot \{L^2 + (A + r_2)^2\}},$$

e riducendo colle (I)

$$\cos^2 \sigma = \frac{(A + r_2)(B + r_1)}{(A + r_1)(B + r_2)},$$

da cui

$$\operatorname{sen}^2 \sigma = \frac{-\delta^2}{(A + r_1)(B + r_2)}.$$

Ma la distanza d dei punti limiti è data da

$$d = \frac{\delta}{\operatorname{sen} \sigma},$$

e si ha dunque

$$d^2 = -(A + r_1)(B + r_2),$$

([1]) Si ricordi che per ciascun raggio di una congruenza il parametro medio H è dato da

$$H = \sqrt{d^2 - \delta^2},$$

essendo d la distanza dei punti limiti, δ quella dei fuochi.

dopo di che, costruendo il quadrato H^2 del parametro medio, risulta

$$H^2 = d^2 - \delta^2 = -(A + r_2)(B + r_1).$$

Ora, se si deriva rapporto ad α il prodotto

$$(A + r_2)(B + r_1),$$

con riguardo alle equazioni differenziali (4), (4*), si vede che questa derivata è nulla, e perciò $H = \text{cost.}$, c. d. d.

Si osservi anche che $B + r_1$, $A + r_2$ sono i valori algebrici dei segmenti $\overline{PF_1}$, $\overline{QF_2}$, onde l'integrale primo sopra osservato delle equazioni differenziali (4) esprime anche che: *nella losanga variabile è costante il prodotto* $\overline{PF_1} \cdot \overline{QF_2}$.

7.

Una seconda notevole proprietà metrica delle quattro congruenze è la seguente:

Ciascuna delle quattro congruenze generate dai lati della losanga è, in doppio modo, una congruenza di rotolamento (1).

E infatti nella configurazione della losanga variabile $M_1 M_2 M_3 M_4$ e delle due sfere coi centri in F_1, F_2, che ne toccano rispettivamente le facce in (M_1, M_3), (M_2, M_4), si trovano soddisfatte le condizioni caratteristiche per le congruenze di rotolamento, di cui al § 7 della Memoria citata in nota. Ne segue p. es. che la congruenza generata dal lato $M_1 M_2$ della losanga è, *in doppio modo*, una congruenza di rotolamento; e precisamente in un primo modo di generazione la superficie d'appoggio sarà la prima falda Σ_1 dell'evoluta, nel secondo modo la seconda Σ_2. Siccome poi la congruenza generata è a parametro medio costante, come si è visto, i teoremi dimostrati al § 15 della Memoria ora citata fanno conoscere la superficie rotolante:

La superficie rotolante S_0 *è, ciascuna volta, un elicoide applicabile sopra* Σ_1 (*o* Σ_2), *con parametro elicoidale eguale al parametro medio* H, *e l'asse dell'elicoide è la retta satellite.*

Si noti poi che le due costanti arbitrarie inerenti alle funzioni A, B permettono di far coincidere l'elicoide rotolante S_0 con uno qualunque degli elicoidi applicabili sopra Σ_1, onde si vede che le congruenze descritte dai lati della losanga mobile sono in sostanza le più generali congruenze gene-

(1) Per congruenza (rettilinea) di rotolamento s'intende una congruenza generata da una retta r (satellite) invariabilmente legata ad una superficie (rotolante) S_0 che rotola sopra una superficie applicabile S (superficie d'appoggio).

Cfr. la Memoria: *Sulle congruenze rettilinee di rotolamento* (Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, tomo 39, 1915).

rate dall'asse di un elicoide che rotoli su qualunque sua superficie applicabile.

I risultati esposti nella presente Nota sembrano suscettibili di applicazioni di qualche interesse, sulle quali mi riservo di tornare più tardi. Qui mi limiterò ad osservare che, se si impone alla losanga variabile di conservare un lato *assolutamente* costante, le due superficie Σ_1, Σ_2 risultano allora applicabili su quadriche rotonde, mentre le quattro superficie S_1, S_2, S_3, S_4 diventano a curvatura costante e formano una quaderna del teorema di permutabilità.

Matematica. — *Intorno alla costruzione razionale degli integrali di Picard della 1ª specie*. Nota del Corrispondente FRANCESCO SEVERI.

Ritorno sulla costruzione razionale degli integrali semplici di 1ª specie appartenenti ad una superficie algebrica, cui son pervenuto in precedenti lavori [1], per colmare una lacuna del ragionamento, la quale non influisce affatto sulle conclusioni.

Oltre al risultato in sè, che era necessario di porre al riparo da ogni obiezione, offre forse interesse l'analisi che qui m'occorre dei cicli lineari della superficie, generati a partire da quelli di una sua sezione piana. In questa direzione conviene spingersi più a fondo per una più intima conoscenza topologica della riemanniana imagine reale della superficie: cosa essenziale per ulteriori progressi della teoria.

1. Sia f, di equazione $f(x, y, z) = 0$, la data superficie di ordine m (irriducibile e dotata di linea doppia e punti tripli).

Gli assi coordinati sieno, rispetto ad f, in posizione generica.

Distendiamo le variabili complesse x, y su due piani, che chiameremo risp. il piano x ed il piano y. Sul piano x, per ogni dato y, saranno determinati i punti di diramazione della funzione z di x, definita da $f = 0$. Li chiameremo i punti D: ognuno di essi è funzione di y. In particolare essi divengono i punti D_0, quando y assume il valore y_0, fissato genericamente. Fissiamo anche sul piano x un generico x_0. Allora restan determinati sul piano y i punti di diramazione della $z(y)$ definita da $f(x_0, y, z) = 0$. Li chiameremo i punti E_0.

[1] *Sur les intégrales simples de première espèce attachées à une surface algébrique*, Comptes rendus, t. 152, 1911, p. 1079; *Sugli integrali semplici appartenenti ad una superficie algebrica*, nel volume: « Scritti matematici offerti ad Enrico D'Ovidio », 1918, pag. 186.