ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE
DEI LINCEI

ANNO CCCXX

1923

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXXII.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1923

rate dall'asse di un elicoide che rotoli su qualunque sua superficie applicabile.

I risultati esposti nella presente Nota sembrano suscettibili di applicazioni di qualche interesse, sulle quali mi riservo di tornare più tardi. Qui mi limiterò ad osservare che, se si impone alla losanga variabile di conservare un lato *assolutamente* costante, le due superficie Σ_1, Σ_2 risultano allora applicabili su quadriche rotonde, mentre le quattro superficie S_1, S_2, S_3, S_4 diventano a curvatura costante e formano una quaderna del teorema di permutabilità.

Matematica. — *Intorno alla costruzione razionale degli integrali di Picard della 1ª specie.* Nota del Corrispondente Francesco Severi.

Ritorno sulla costruzione razionale degli integrali semplici di 1ª specie appartenenti ad una superficie algebrica, cui son pervenuto in precedenti lavori [1], per colmare una lacuna del ragionamento, la quale non influisce affatto sulle conclusioni.

Oltre al risultato in sè, che era necessario di porre al riparo da ogni obiezione, offre forse interesse l'analisi che qui m'occorre dei cicli lineari della superficie, generati a partire da quelli di una sua sezione piana. In questa direzione conviene spingersi più a fondo per una più intima conoscenza topologica della riemanniana imagine reale della superficie: cosa essenziale per ulteriori progressi della teoria.

1. Sia f, di equazione $f(x, y, z) = 0$, la data superficie di ordine m (irriducibile e dotata di linea doppia e punti tripli).

Gli assi coordinati sieno, rispetto ad f, in posizione generica.

Distendiamo le variabili complesse x, y su due piani, che chiameremo risp. il piano x ed il piano y. Sul piano x, per ogni dato y, saranno determinati i punti di diramazione della funzione z di x, definita da $f = 0$. Li chiameremo i punti D: ognuno di essi è funzione di y. In particolare essi divengono i punti D_0, quando y assume il valore y_0, fissato genericamente. Fissiamo anche sul piano x un generico x_0. Allora restan determinati sul piano y i punti di diramazione della $z(y)$ definita da $f(x_0, y, z) = 0$. Li chiameremo i punti E_0.

[1] *Sur les intégrales simples de première espèce attachées à une surface algébrique*, Comptes rendus, t. 152, 1911, p. 1079; *Sugli integrali semplici appartenenti ad una superficie algebrica*, nel volume: « Scritti matematici offerti ad Enrico D'Ovidio », 1918, pag. 186.

Assunto il punto x_0 come origine dei cappii, costruiamo la superficie di Riemann $R(y_0)$, che ha le diramazioni nei D_0, e che rappresenta la $z(x)$ definita da $f(x, y_0, z) = 0$. Variando y, a partire da y_0, resta per continuità definita la riemanniana $R(y)$, che ha le diramazioni nei D. Naturalmente le linee di passaggio di questa riemanniana (piano m-plo x), dipendono in generale dal cammino con cui si va da y_0 al valor considerato di y.

2. Ciò premesso, si fissi sul piano x un ciclo chiuso *orientato* τ, che parta da x_0, in un determinato verso, e vi ritorni. Se $z_1^{(0)}, z_2^{(0)}, \dots, z_m^{(0)}$ sono i valori distinti di z, corrispondenti ad $x = x_0, y = y_0$, e se, lasciato fermo y in y_0, il ciclo τ muta $z_h^{(0)}$ in $z_k^{(0)}$, ad esso risponde in $R(y_0)$ un cammino che va dall'*origine* $N_h^{(0)}(x_0, y_0, z_h^{(0)})$ al *termine* $N_k^{(0)}(x_0, y_0, z_k^{(0)})$. In particolare, quando $h = k$, il cammino omologo a τ è un ciclo lineare chiuso. Si ottengono così su $R(y_0)$ m cammini orientati corrispondenti a τ. Chiameremo in modo generico $\sigma_h^{(0)}$ quello che ha l'origine in $N_h^{(0)}$.

Tenuto fisso il ciclo τ, si faccia ora variare y, a partire da y_0. Allora i cammini σ, omologhi di τ, variano con $R(y)$, a partire dalle posizioni iniziali $\sigma^{(0)}$; e durante la variazione taluno di quei cammini, che inizialmente era aperto, può chiudersi o viceversa, pel fatto che qualcuno dei punti variabili D venga ad attraversare τ. Così risultano definiti per continuità i cammini σ corrispondenti ad un y qualunque. Naturalmente l'ordine con cui, per una data posizione finale $\bar{y}$ di y, questi cammini si succedono, come trasformati di $\sigma_1^{(0)}, \dots, \sigma_m^{(0)}$, dipende dalla via seguìta per andare da y_0 a $\bar{y}$. Ritornando y in y_0, il complesso dei cammini σ ritorna in sè medesimo; ma essi si ripresenteranno in generale permutati, e, in quanto ogni $\sigma^{(0)}$ è caratterizzato dalla sua origine $N^{(0)}$, la permutazione subìta sarà identica a quella che lo stesso cammino di y ha prodotto sulle determinazioni $z_1^{(0)}, \dots, z_m^{(0)}$, considerate adesso come valori della $z(y)$ definita da $f(x_0, y, z) = 0$.

Quel che si è detto pei cammini $\sigma^{(0)}$ vale pei cammini $\bar{\sigma}$, da quelli derivati facendo percorrere ad y un cammino λ da y_0 a $\bar{y}$: cioè un ciclo da $\bar{y}$ ad $\bar{y}$ permuterà fra loro i $\bar{\sigma}$. Tutti i cammini λ di origine y_0 e di estremo $\bar{y}$, deducibili l'uno dall'altro per deformazione continua, senza traversare alcun punto E_0, condurranno dai $\sigma^{(0)}$ ai $\bar{\sigma}$ nel medesimo ordine. Insomma *i cammini* σ, *così determinati per ogni punto del piano* y, *si comportano come i rami della funzione algebrica* z *di* y *definita da* $f(x_0, y, z) = 0$.

3. Un altro modo havvi di considerar le cose. Sul piano y son determinati anche i cosidetti *valori singolari*, a ciascuno b dei quali corrisponde un gruppo di punti D fra cui ve ne sono due coincidenti, per guisa che, girando y attorno a b, i due punti D che vanno a coincidere per $y = b$, si scambiano fra loro. Tali valori provengono o da piani $y = b$ tangenti ad f o da piani $y = b$ che contengono tangenti asintotiche di f parallele

all'asse z. Ma i veri valori singolari, che hanno importanza sostanziale per la nostra questione, sono soltanto quelli della prima categoria [1].

Invece di tener fisso il ciclo τ, si può, mentre y varia, deformare τ con continuità in modo che, pur passando sempre per x_0, non venga mai ad essere attraversato da punti D. E per ogni siffatta posizione di τ, si possono costruire i corrispondenti cammini σ su $R(y)$. Allora, dopo una circolazione di y, ciascuno dei cammini σ ritorna di certo in sè, se niuna permutazione è avvenuta fra i punti D; mentre, se avviene una permutazione fra i D, i cammini σ si mutano generalmente in cammini che non sono affatto riducibili ai precedenti (per deformazione continua, senza attraversare i punti D).

4. Tutto ciò chiarito, suppongasi ora y_0 prossimo ad uno dei valori singolari b, talmente che, quando y descrive una piccola area A contenente y_0 e b, la areola A′ descritta dai due punti D (e sieno D′, D″) che si permutano fra loro per le circolazioni attorno a b, non abbia punti comuni colle aree descritte in corrispondenza dagli altri punti D, ognuno dei quali ritorna in sè per le circolazioni suddette. Si potrà allora scegliere come ciclo τ, uscente da x_0, un ciclo che avvolga i soli due punti D'_0, D''_0, posizioni rispettive di D′, D″ per $y = y_0$, e che abbracci pure nel suo interno la areola A′.

I punti D′, D″ connettono i medesimi due fogli della riemanniana $R(y)$, perchè essi, sovrapponendosi per $y = b$, devono dar luogo ad un punto doppio di $f(x, b, z) = 0$. Sieno $z_1^{(0)}$, $z_2^{(0)}$ le due determinazioni di z, corrispondenti ad $x = x_0$, $y = y_0$, che son permutate da ciascuno dei due cappii da x_0 ai punti D'_0, D''_0. Allora, per $y = y_0$, al ciclo τ rispondono m cicli (chiusi) $\sigma_1^{(0)}, \dots, \sigma_m^{(0)}$. Mentre y varia entro A, nessuno dei punti D attraversa τ, e quindi *i cammini* σ *corrispondenti a* τ *sono sempre i medesimi, tanto se si considerino le cose dal punto di vista del n. 2* (*varia* y *e resta fermo* τ) *che del n. 3* (*varia* y *e si deforma* τ).

5. Stabilite queste premesse topologiche, consideriamo un integrale abeliano $u = \int R(x, y, z)\, dx$, appartenente alla curva $f(x, y, z) = 0$ (y parametro) e supponiamo ch'esso sia di 1ª specie per *ogni* y (compreso $y = \infty$).

I suoi valori $u_1, u_2, \dots, u_m$ lungo i cammini $\sigma_1, \dots, \sigma_m$, definiti su $R(y)$ secondo il punto di vista del n. 2, costituiscono gli m rami d'una funzione *algebroide*, esistente in tutto il piano y e diramata nei punti E_0. Le funzioni simmetriche elementari di $u_1, \dots, u_m$ sono cioè funzioni analitiche uniformi di y. E poichè esse restano uniformi e finite per ogni y, si conclude che sono costanti, e quindi che tali sono le $u_1, u_2, \dots, u_m$.

Questa conclusione vale in particolare pei cammini $\sigma_1, \dots, \sigma_m$ corrispondenti al ciclo τ definito nel n. prec., cammini che, fino a quando si limiti la variabilità di y nell'areola A, sono addirittura cicli (chiusi) di $R(y)$.

[1] Ved. la mia Nota, *Sulla teoria degl'integrali semplici di 1ª specie appartenenti ad una superficie*, in questi Rendiconti, 1921, pag. 233.

Ma le funzioni $u'_1, u'_2, \ldots, u'_m$, analoghe alle $u_1, \ldots, u_m$, ottenute da u quando y varii in tutto il piano e i cammini $\sigma_1, \ldots, \sigma_m$ sieno costruiti, a partire dal ciclo τ definito nel n. prec., dal punto di vista del n. 3, coincidono risp. nell'areola A colle funzioni $u_1, u_2, \ldots, u_m$ (n. 4): dunque u'_1, u'_2, che sono olomorfe nell'area A, sono ivi costanti.

Ora u'_1 è il periodo di u lungo il ciclo σ_1 avvolgente i due punti di diramazione D', D''. E poichè al limite, per $y = b$, il ciclo σ_1 diventa un ciclo della riemanniana R(b), avvolgente un punto non di diramazione, sopra un determinato foglio di questa, così esso è omologo a un ciclo nullo. Da ciò, tenuto conto che u è di 1ª specie anche per $y = b$, se ne conclude che la costante u'_1 è nulla. E analogamente per u'_2.

Come si sa, i periodi di u, considerati come funzioni di y, soddisfanno all'equazione differenziale lineare di Fuchs-Picard, i cui punti critici cadono nei punti singolari b. Nell'intorno del punto singolare $y = b$ è definito un integrale olomorfo $\omega(y)$ di tale equazione, corrispondente al ciclo σ_1 (o σ_2), e un altro integrale $\Omega(y)$, che diventa infinito logaritmicamente in $y = b$, aumentando di $\omega(y)$ per una circolazione di y attorno a b. Tutti gli altri integrali dell'equazione differenziale sono olomorfi attorno a b. Poichè nel nostro caso $\omega(y) = u'_1$ è nullo, da $\Omega(y)$ viene a sparire la singolarità logaritmica. Onde tutti i periodi di u sono olomorfi attorno ad $y = b$ e similmente nell'intorno di ogni altro punto singolare. E siccome essi sono dovunque finiti, risultano in definitiva costanti. La conclusione è il teorema da me già dato nei lavori citati:

Se un integrale abeliano relativo ad una curva algebrica $f(x, y, z) = 0$, i cui coefficienti dipendano razionalmente da un parametro y, resta di 1ª specie per ogni valore di y (compreso $y = \infty$), i suoi periodi sono indipendenti da y (1).

Da ciò, come nei miei lavori precedenti, si trae subito la nota costruzione razionale dei differenziali totali di 1ª specie appartenenti alla superficie $f(x, y, z) = 0$.

(1) Il difetto della dimostrazione esposta nel secondo dei lavori citati in nota (1) a pag. 192, consiste in ciò: che la trasformazione del n. 3 non basta a uniformizzare la funzione che là si considera.