ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

ANNO CCCXX

1923

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXXII.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1923

Matematica. — *La teoria proiettiva delle congruenze W.* Nota del Corrispondente GUIDO FUBINI.

1. Qui e in alcune Note che seguiranno esporrò in modo sistematico le mie antiche ricerche sulle congruenze W, usando però anche di alcune idee contenute in un assai notevole lavoro posteriore dello Jonas [1]. Si vedrà che la teoria riceve una semplicità insperata, che si adatta bene a ogni problema particolare; io ne esporrò anche i legami con le usuali teorie metriche, e ne farò applicazioni alle congruenze W con falde focali rigate od isoterme assintotiche e ai relativi teoremi di permutabilità.

2. Sarà bene anzitutto riassumere brevemente alcune formole relative alla teoria della superficie. Se x, y, z, t sono coordinate omogenee di un punto A funzioni di due parametri u, v, indicheremo con (x, x_u, x_v, x_{uv}) il determinante, di cui gli elementi scritti tra ( ) costituiscono la prima riga, mentre le altre righe se ne ottengono sostituendo alla x le y, z, t. Se le u, v sono assintotiche sulla superficie S generata dal punto A, allora, posto:

$$H^2 = (x, x_u, x_v, x_{uv}) \tag{1}$$

varranno le:

$$x_{uu} - \frac{\partial \log H}{\partial u} x_u - \beta x_v - px = 0 \quad ; \quad x_{vv} - \frac{\partial \log H}{\partial v} x_v - \gamma x_u - qx = 0 \tag{2}$$

ove $2H(\beta du^3 \pm \gamma dv^3) = 0$ è l'equazione delle linee di Darboux-Segre sulla S. (La prima delle (2) p. es. si verifica, derivandola rispetto v e confrontandola con l'equazione dedotta da (1) derivando rispetto u).

Se formiamo le coordinate (ξ, η, ζ, τ) del piano tangente in guisa che

$$(\xi, \xi_u, \xi_v, \xi_{uv}) = (x, x_u, x_v, x_{uv}) = H^2 \tag{3}$$

varranno le:

$$\xi_{uu} - \frac{\partial \log H}{\partial u} \xi_u + \beta \xi_v - P\xi = 0 \quad ; \quad \xi_{vv} - \frac{\partial \log H}{dv} \xi_v + \gamma \xi_u - Q\xi = 0 \tag{4}$$

ove

$$P - p = \beta_v + \beta \frac{\partial \log H}{\partial v} \quad ; \quad Q - q = \gamma_u + \gamma \frac{\partial \log H}{\partial u}. \tag{5}$$

[1] Cfr. le Mem. dell'A. *Fondamenti di geom. proiettivo differ.* (Rend. del Circ. Mat. di Palermo, tomo 43 (1918-19), le Mem. ivi citate e le Note: *Su una classe di congr. W* (Rend. dei Lincei vol. 25, 1° sem.), *Sulla teoria proiett. delle congr. W* (ibidem, vol. 30, I° sem.) e la Mem. dello Jonas nel tomo 29 p. 40 degli Jahresberichte d. d. m. Vereinigung (1920): *Ueber die Konstruktion der W. Kongruenzen etc.*

Le condizioni d'integrabilità si scrivono

$$(6)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial u}\left[\gamma_u + 2q + \gamma \dfrac{\partial \log H}{\partial u} + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial \log H}{\partial v}\right)^2\right] = \beta\gamma_v + 2\gamma\beta_v + \dfrac{\partial^3 \log H}{\partial u\, \partial v^2} \\ \dfrac{\partial}{\partial v}\left[\beta_v + 2p + \beta \dfrac{\partial \log H}{\partial v} + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial \log H}{\partial u}\right)^2\right] = \gamma\beta_u + 2\beta\gamma_u + \dfrac{\partial^3 \log H}{\partial v\, \partial u^2} \\ q_v\beta + 2\beta_v q + q_u \dfrac{\partial \log H}{\partial u} + p_{vv} = p_u\gamma + 2\gamma_u p + p_u \dfrac{\partial \log H}{\partial v} + q_{uu}. \end{cases}$$

Notiamo che *dalla superficie luogo di punti si passa alla superficie pensata come inviluppo di piani tangenti, sostituendo alle* β, γ, *le* $-\beta, -\gamma$, *e lasciando invariate* H *e le* $\pi, \varkappa$ *definite dalle*:

$$(7)\quad \begin{cases} \pi = p + \dfrac{1}{2}\beta_v + \dfrac{1}{2}\beta\dfrac{\partial \log H}{\partial v} = P - \dfrac{1}{2}\beta_v - \dfrac{1}{2}\beta\dfrac{H_v}{H}, \\ \varkappa = q + \dfrac{1}{2}\gamma_u + \dfrac{1}{2}\gamma\dfrac{\partial \log H}{\partial u} = Q - \dfrac{1}{2}\gamma_u - \dfrac{1}{2}\gamma\dfrac{H_u}{H}. \end{cases}$$

Potremmo anzi nelle (6) sostituire, (per avere formole che si conservano per trasformazioni reciproche) alle p, q i loro valori espressi in funzione di π e di $\varkappa$.

3. Cerchiamo le superficie S_1, seconda falda focale di una congruenza W avente S per prima falda duale; e indichiamo un punto o un piano con la sua prima coordinata. Per un punto x_1 di S_1 corrispondente ad un punto x di S varranno delle formole:

$$(8)\qquad x_1 = \mu x + 2(Ax_u + Bx_v) \quad \text{(e analoghe in } y, z, t)$$

mentre per il relativo piano tangente sarà:

$$(9)\qquad \xi_1 = \lambda x + 2(Ax_u - Bx_v).$$

Se esprimiamo che la retta $x - x_1$ genera una congruenza W, di cui S ed S_1 sono falde focali, troviamo che, moltiplicando μ, λ, A, B per un conveniente fattore (ciò che nulla muta, perchè si tratta di coordinate omogenee) devono valere le [1]:

$$(10)\qquad A_v = -B\gamma \qquad B_u = -A\beta$$

$$(11)\qquad \mu = -B_v - A_u - B\frac{H_v}{H} - A\frac{H_u}{H}$$

$$(12)\qquad \lambda = B_v - A_u + B\frac{H_v}{H} - A\frac{H_u}{H}.$$

[1] Per i particolari del calcolo affatto elementare rimando, per ragioni di spazio, alla mia Mem. cit.: *Fondamenti*. ecc.

La ricerca delle congruenze W *di data prima falda focale equivale alla integrazione del semplicissimo sistema* (10) [1].

4. Invece nelle solite trattazioni metriche, il problema, come apparirà ora ben chiaro, si rivolge alla determinazione della μ. Alle (11), (12) si possono sostituire le:

$$(13)\qquad 2\,\mathrm{A}_u = -(\mu+\lambda) - 2\,\mathrm{A}\frac{\mathrm{H}_u}{\mathrm{H}} \qquad 2\,\mathrm{B}_v = \lambda - \mu - 2\,\mathrm{B}\frac{\mathrm{H}_v}{\mathrm{H}}.$$

Scrivendo che le (10), (13), pensate come equazioni in A, B, sono integrabili, si trova:

$$(14)\qquad \begin{cases} \lambda_v = -\mu_v - 2\,\mathrm{A}\,(\log \mathrm{H})_{uv} + 2\,\mathrm{B}\gamma\,\dfrac{\mathrm{H}_u}{\mathrm{H}} + 2\,\gamma_u\,\mathrm{B} - 2\,\beta\gamma\,\mathrm{A} \\ \lambda_u = \mu_u + 2\,\mathrm{B}\,(\log \mathrm{H})_{uv} - 2\,\mathrm{A}\beta\,\dfrac{\mathrm{H}_v}{\mathrm{H}} - 2\,\beta_v\,\mathrm{A} + 2\,\beta\gamma\,\mathrm{B}. \end{cases}$$

Scrivendo le condizioni di integrabilità di (14) si trova per le (6):

$$(15)\qquad \mu_{uv} - \left(\frac{\partial^2 \log \mathrm{H}}{\partial u\,\partial v} + \beta\gamma\right)\mu + 2\,\mathrm{B}q_u + 2\,\mathrm{A}p_v = 0.$$

5. Prima di proseguire osserviamo che, se moltiplichiamo le coordinate di un punto di S per uno stesso fattore ϱ, allora H resta moltiplicato per ϱ^2. Si puo scegliere ϱ in guisa che:

α) sia $p = q = 0$, ciò che equivale a usare coordinate *non omogenee*, ossia a supporre che la 4ª coordinata sia *1*.

β) oppure che sia $\mathrm{H} = 1$. Si hanno le coordinate di Wilczynski, il cui uso non va scevro da inconvenienti, perchè il corrispondente fattore ϱ dipende *dai parametri* u, v *usati per le assintotiche* e non è intrinseco.

γ) oppure, se la superficie non è *rigata*, cioè se $\beta\gamma \neq 0$, in guisa che $\mathrm{H} = \beta\gamma$. In quest'ultima ipotesi si hanno le coordinate, che io (loc. cit.) chiamai *normali* e che nella geom. proiettiva hanno l'ufficio che le cartesiane hanno nella geom. metrica.

Nel caso (α) la (15) diventa:

$$(15^{-bis})\qquad \mu_{uv} = \mathrm{M}\mu \qquad \mathrm{M} = \frac{\partial^2 \log \mathrm{H}}{\partial u\,\partial v} + \beta\gamma.$$

[1] Noto che le (10) equivalgono alla sola equazione lineare

$$(10^{-bis})\qquad \left(\frac{\mathrm{B}_u}{\beta}\right)_v = \mathrm{B}\gamma \qquad \text{oppure} \left(\frac{\mathrm{A}_v}{\gamma}\right)_u = \mathrm{A}\beta,$$

oppure, lasciando indeterminato il fattore per cui si moltiplicano le A, B, alla:

$$(10^{-ter})\qquad \frac{\partial^2 \log \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}}{\partial u\,\partial v} = \left(\frac{\mathrm{B}}{\mathrm{A}}\gamma\right)_u - \left(\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}\beta\right)_v.$$

Ora se la quarta coordinata $t=1$ e le prime x, y, z sono cartesiane ortogonali, allora con le notazioni delle classiche lezioni di Geom. differenziale del Prof. L. Bianchi si ha da (1)

$$H^2 = D' \sqrt{EG - F^2} \quad ; \quad \text{curvatura di Gauss} = -\frac{1}{\varrho^2} \; ; \; \frac{1}{\varrho^2} = \frac{D'^2}{EG - F^2}$$

$$\frac{\partial \log H}{\partial u} = \left\{ \begin{matrix} 11 \\ 1 \end{matrix} \right\} \; ; \; \frac{\partial \log H}{\partial v} = \left\{ \begin{matrix} 22 \\ 2 \end{matrix} \right\} \; ; \; \beta = \left\{ \begin{matrix} 11 \\ 2 \end{matrix} \right\} \; ; \; \gamma = \left\{ \begin{matrix} 22 \\ 1 \end{matrix} \right\}$$

$$M = \left\{ \begin{matrix} 11 \\ 1 \end{matrix} \right\}_v + \left\{ \begin{matrix} 11 \\ 2 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} 22 \\ 1 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 1 \end{matrix} \right\}_u + \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 1 \end{matrix} \right\} + \frac{F}{\varrho^2} = \frac{1}{\sqrt{\varrho}} \frac{\partial^2 \sqrt{\varrho}}{\partial u \, \partial v} - f \; (^1).$$

La (15) *o* (15^{-bis}) *è la equazione di Moutard, base delle teorie metriche delle congruenze W.*

Oss. Si noti che se, con le notazioni del Bianchi, $Xx + Yy + Zz = W$ è l'equazione del piano tangente, il determ. $(X \, X_u \, X_v \, X_{uv})$ vale $D' \sqrt{eg - f^2}$.

Per normare le X, Y, Z, W in guisa che valga la (3), dovremo moltiplicarle per $\sqrt[4]{\dfrac{EG - F^2}{eg - f^2}}$, ossia sostituire loro le $\xi = X\sqrt{\varrho}$, $\eta = Y\sqrt{\varrho}$, $Z = Z\sqrt{\varrho}$, ecc.

Le prime tre di queste sono appunto le quantità che figurano nelle formole di Lelieuvre e di cui qui appare ora ben chiaro il significato!

6. Dalle (8) derivando si ha:

$$(16) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial x_1}{\partial u} &= (\mu_u + 2Ap)\, x - \lambda \, x_u + 2B\, x_{uv} \\ \frac{\partial x_1}{dv} &= (\mu_v + 2Bq)\, x + \lambda \, x_v + 2A\, x_{uv} \end{aligned} \right.$$

$$\frac{\partial^2 x_1}{\partial u \, \partial v} = ax + bx_u + cx_v - \mu x_v$$

dove è per noi inutile esplicitare i valori delle a, b, c.

Si trova:

$$H_1^2 = \left(x_1, \frac{\partial x_1}{\partial u}, \frac{\partial x_1}{\partial v}, \frac{\partial^2 x_1}{\partial u \, \partial v} \right) = (x, x_u, x_v, x_{uv}) \begin{vmatrix} \mu & 2A & 2B & 0 \\ \mu_u + 2Ap & -\lambda & 0 & 2B \\ \mu_v + 2Bq & 0 & \lambda & 2A \\ a & b & c & -\mu \end{vmatrix}$$

(1) Per queste identità cfr. Picone (Rendiconti del Circ. Matem. di Palermo, tomo 37) *Sulle congruenze rettilinee W* a pag. 227.

Aggiungendo all'ultima colonna la seconda moltiplicata per $\frac{2B}{\lambda}$ e la terza per $-\frac{2A}{\lambda}$ si trova così $(\varkappa \lambda \neq 0)$:

$$H_1^2 = H^2 \left(-\mu + b\frac{2B}{\lambda} - c\frac{2A}{\lambda}\right) \lambda \left\{ 2B(\mu_v + 2Bq) - \lambda\mu - 2A(\mu_u + 2Ap) \right\}$$

$$= H^2 \left[\lambda\mu + 2A(\mu_u + 2Ap) - 2B(\mu_v + 2Bq)\right]^2$$

(risultato valido anche per $\lambda = 0$, com'è evidente) ossia:

$$\text{(I)} \qquad \frac{H_1}{H} = N = 2A(\mu_u + 2Ap) - 2B(\mu_v + 2Bq) + \lambda\mu$$

$$= 2A(\lambda_u + 2AP) + 2B(\lambda_v - 2BQ) + \lambda\mu$$

che è una espressione essenziale per la nostra teoria.

Se fosse $N = 0$, *la seconda falda sarebbe degenere*. Escludiamo questo caso di minore interesse.

Fisica. — *Fenomeni foto-elettrici sui coibenti elettrizzati per strofinamento* [1]. Nota del Corrisp. P. Cardani.

L'argomento è stato molto limitatamente trattato dal Righi nelle sue classiche ricerche: egli, infatti, affermò [2] che « prendendo un disco coibente, per es. di zolfo, collocandolo sopra un disco metallico comunicante con l'elettrometro, ed elettrizzando negativamente la faccia libera del coibente, *per es. con lo strofinamento*, appena le radiazioni cadono sul coibente elettrizzato, l'elettrometro devia in senso positivo, se fu messo prima dell'esperienza in comunicazione col suolo, o si vede diminuire la deviazione negativa rimasta, se lo si è lasciato con la sua carica d'influenza ». « L'effetto è notevolissimo con lo zolfo, un po' minore con l'ebanite, e assai piccolo con la gomma lacca e specialmente col vetro ».

Dopo quelle del Righi, pochissime furono le esperienze [3] sul fenomeno foto-elettrico presentato dai coibenti; e nessuno, che mi consti, ha seguìto il metodo del Righi: d'altra parte dall'accenno fatto dal Righi « sulla diminuzione della deviazione negativa dell'elettrometro rimasta, se lo si è lasciato con la sua carica d'influenza » è da ritenere che egli abbia sperimentato con piccole quantità di elettricità svolte per strofinamento.

[1] Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisica della R. Università di Parma.

[2] Righi, *Sui fenomeni elettrici provocati dalle radiazioni*. Nuovo Cimento, 1889, serie II, tomo XXV, pag. 136.

[3] Vedi Hughes, *Die Lichtelektricität*. Leipzig, 1915, pag. 157.