ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE
DEI LINCEI

ANNO CCCXX

1923

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXXII.

1° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1923

NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sulla curvatura conforme di una varietà.* Nota di ALDO FINZI, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

1. È noto che al quadrato dell'elemento lineare di una qualunque V_n si connette un sistema quadruplo covariante, identicamente nullo per $n \leqq 3$, e il cui annullarsi, per $n > 3$, è condizione necessaria e sufficiente affinchè V_n sia rappresentabile conformemente sulla varietà euclidea ad n dimensioni ([1]). Gli elementi di tale sistema, che indicheremo con L_{ijhk}, sono funzioni lineari dei simboli di Riemann di 1ª specie, esprimibili nel modo seguente

$$(1) \qquad L_{ijhk} = a_{ij,hk} + \frac{1}{2(n-1)(n-2)}(a_{ik}A_{jh} - a_{ih}A_{jk} + a_{jh}A_{ik} - a_{jk}A_{ih}),$$

quando si ponga

$$(2) \qquad A_{ik} = a_{ik}G - 2(n-1)G_{ik},$$

essendo

$$(3) \qquad G_{ik} = \sum_{1\,jh}^{n} a^{(jh)} a_{ij,hk} \quad , \quad G = \sum_{1\,ik}^{n} a^{(ik)} G_{ik}.$$

In un libro molto interessante, testè pubblicato da D. J. Struick ([2]), si attribuisce al sistema (1) anche il carattere invariantivo di fronte ad una trasformazione conforme di V_n; ma l'affermazione dev'essere modificata, come subito vedremo.

2. Se V_n e V'_n sono due varietà in rappresentazione conforme fra loro, se cioè fra i coefficienti dei quadrati dei loro elementi lineari e fra i loro reciproci sussistono le relazioni

$$(4) \qquad a'_{ik} = e^{2\tau} a_{ik} \quad , \quad a'^{(ik)} = e^{-2\tau} a^{(ik)},$$

([1]) J. A. Schouten, *Ueber die konforme Abbildung n-dimensionaler Mannigfaltigkeiten mit quadratischer Massbestimmung auf eine Mannigfaltigkeit mit euklidischer Massbestimmung*. Mathem. Zeitschrift, Band 11, Heft. 1/2, 1921. — A. Finzi, *Sulle varietà in rappresentazione conforme con la varietà euclidea a più di tre dimensioni*. Rend. R. Acc. Lincei, vol. XXXI, serie 5ª, 1° sem. 1922.

([2]) D. J. Struick, *Grundzüge der Mehrdimensionalen Differentialgeometrie in direkter Darstellung*. Berlin, J. Springer, 1922; cfr. pag. 152. Il libro è dedicato al Ricci, fondatore del Calcolo differenziale assoluto.

fra i simboli di Riemann di 1ª specie ad esse relativi intercedono le seguenti [1]

$$(5)\qquad e^{-2\tau} a'_{ij,hk} = a_{ij,hk} + a_{ik}(\tau_{jh} - \tau_j \tau_h) - a_{ih}(\tau_{jk} - \tau_j \tau_k) + \\ + a_{jh}(\tau_{ik} - \tau_i \tau_k) - a_{jk}(\tau_{ih} - \tau_i \tau_h) + (a_{ik} a_{jh} - a_{ih} a_{jk}) \Delta\tau \,.$$

Da queste, con l'impiego delle (3) e con la convenzione di distinguere le quantità omologhe di V_n e V'_n, accentando queste ultime, ricaviamo

$$(6)\qquad G'_{ik} = G_{ik} + (n-2)(\tau_{ik} - \tau_i \tau_k) + a_{ik} \{ \Delta_2 \tau + (n-2) \Delta\tau \} \,,$$

$$(7)\qquad e^{2\tau} G' = G + 2(n-1) \Delta_2 \tau + (n-1)(n-2) \Delta\tau \,.$$

Considerando le (5) come equazioni lineari nelle differenze $\tau_{ik} - \tau_i \tau_k$, le loro condizioni di compatibilità possono aversi, sostituendo a tali differenze, nelle (5) stesse, le espressioni

$$(8)\qquad \tau_{ik} - \tau_i \tau_k = \frac{1}{2(n-1)(n-2)} (\boldsymbol{A}_{ik} - \boldsymbol{A}'_{ik}) - \frac{a_{ik}}{2} \Delta\tau \,,$$

che si ricavano, con l'impiego delle posizioni (2), dalle (5), (6) e (7). Facendo tale sostituzione e ricordando le (1), si perviene alle relazioni

$$(9)\qquad L'_{ijhk} = e^{2\tau} L_{ijhk} \,,$$

dalle quali si rileva che manca nelle L_{ijhk} il carattere invariantivo per una trasformazione conforme di V_n.

Se però moltiplichiamo i due membri delle (9) per $a'^{(jl)}$ e sommiamo rispetto a j da 1 ad n, tenendo conto delle (4), riconosciamo che tale carattere spetta invece al sistema misto $\sum_{1}^{n} {}_j\, a^{(jl)} L_{ijhk}$, i cui elementi, con le (1), hanno le seguenti espressioni

$$(10)\qquad \sum_{1}^{n}{}_j\, a^{(jl)} L_{ijhk} = \{ il, hk \} + \frac{1}{2(n-1)(n-2)} \Big[\varepsilon_h^{(l)} \boldsymbol{A}_{ik} - \varepsilon_k^{(l)} \boldsymbol{A}_{ih} + \\ + \sum_{1}^{n}{}_j\, a^{(jl)} (a_{ik} \boldsymbol{A}_{jh} - a_{ih} \boldsymbol{A}_{jk}) \Big] \,,$$

nelle quali intervengono i simboli di Riemann di 2ª specie e i simboli $\varepsilon_h^{(l)}$ rappresentano l'unità o lo zero, secondochè $h = l$ o $h \neq l$.

Il sistema misto ora considerato ha poi, evidentemente, le proprietà ricordate in principio del sistema L_{ijhk}; a quello però e non a questo è da attribuirsi, col Weyl, la denominazione di *curvatura conforme* di V_n.

3. I secondi membri delle (1) e (10) diventano molto semplici, quando, per la V_n che si considera, si abbiano le relazioni

$$G_{ik} = \lambda a_{ik} \,, \quad \text{e quindi le altre} \quad G = n\lambda \,, \quad \boldsymbol{A}_{ik} = (2-n) \lambda a_{ik} \,.$$

[1] T. Levi-Civita, *ds^2 einsteiniani in campi newtoniani*; III. *Formole ausiliarie*. R. Acc. Lincei, vol. XXVII, serie 5ª, 2° sem., 1917. Cfr. pag. 187.

Si ha allora

$$\text{(1')}\qquad L_{ijhk} = a_{ij,hk} - \frac{\lambda}{n-1}(a_{ik}\,a_{jh} - a_{ih}\,a_{jk}),$$

$$\text{(10')}\qquad \sum_{1}^{n}{}_{j}\, a^{(jl)}\, L_{ijhk} = \{ il, hk \} - \frac{\lambda}{n-1}(a_{ik}\,\varepsilon_h^{(l)} - a_{ih}\,\varepsilon_k^{(l)}).$$

Dalle (1') si riconosce, come fu rilevato da Schouten e Struick (1), che *ogni* V_3 *per cui sia* $G_{ik} = \lambda a_{ik}$ *è a curvatura costante, e che le* $V_n (n > 3)$ *in rappresentazione conforme con la varietà euclidea e per le quali sia* $G_{ik} = \lambda a_{ik}$, *sono pure a curvatura costante*. In particolare, se $\lambda = 0$, la curvatura è nulla.

Dalle (10') si rileva che *per ogni* $\bar{V}_n (n > 3)$, *con* $G_{ik} = 0$, *la curvatura conforme è data dai simboli di Riemann di 2ª specie* (2).

4. Il sistema triplo covariante definito dalle posizioni

$$A_{ikl} = \varDelta_{ikl} - \varDelta_{ilk},$$

che è nullo per ogni V_n in rappresentazione conforme con la varietà euclidea, e il cui annullarsi anzi, per $n = 3$, esprime la condizione necessaria e sufficiente per la rappresentazione conforme sullo spazio ordinario, quando $n = 3$ è invariante di fronte ad una trasformazione conforme della varietà a cui si riferisce, ma cessa di esserlo per $n > 3$. Per mostrare ciò procediamo alla ricerca delle condizioni d'integrabilità delle (8).

Se deriviamo tali equazioni ed eliminiamo le derivate terze della τ con le note formole d'inversione e le derivate seconde con le (8) stesse, con calcoli analoghi a quelli svolti in altro lavoro (3), perveniamo alle relazioni (4)

$$\text{(11)}\qquad A'_{ikl} = A_{ikl} - 2(n-1)(n-2)\sum_{1}^{n}{}_{r}\,\tau^{(r)}\, L_{rikl},$$

nelle quali apparisce ancora la funzione τ.

(1) J. A. Schouten and D. J. Struick, *On some properties of general manifolds relating to Einsteins theory of gravitation* American Journal of Mathem., vol. XLIII, 4 oct. 1921.

(2) Nella Nota appena citata di Schouten e Struick è contenuta la proposizione: *se due* V_n, *con* $G_{ik} = 0$, *sono rappresentabili conformemente l'una sull'altra, sono uguali i loro simboli di Riemann di 1ª specie*. L'equivoco degli Autori proviene dall'omissione del fattore corrispondente al nostro $e^{-2\tau}$ nella formola da cui parte la loro dimostrazione formola che corrisponde alla nostra (5).

(3) A. Finzi, *Sulla rappresentabilità conforme di due varietà ad n dimensioni l'una sull'altra*. Atti del R. Ist. Veneto, tomo LXXX, parte 2ª, 1921.

(4) In conformità di queste nostre (11) devono essere modificate le (144) di pag. 152 del libro citato dello Struick.

Osserviamo qui che la nostra Nota, appena richiamata, si chiude con una proposizione che non discorda dalle relazioni (11), ora stabilite, ma che, per l'ipotesi restrittiva in essa contenuta, per $n = 3$ si traduce senz'altro nelle (12) e per $n > 3$ perde significato.

Quando $n=3$ i coefficienti delle $\tau^{(r)}$ nei secondi membri delle precedenti sono identicamente nulli, e nelle

$$A'_{ikl} = A_{ikl}, \tag{12}$$

che se ne deducono, si hanno le condizioni d'integrabilità delle (8).

L'invarianza del sistema $A_{rst} (n=3)$ per una trasformazione conforme della varietà a cui si connette, era nota; ma la deduzione che qui abbiamo fatto delle (12) attribuisce a queste equazioni il carattere di condizioni, non solo necessarie, ma anche *sufficienti* per la rappresentabilità conforme di due varietà a tre dimensioni l'una sull'altra.

Meccanica. — *Di un paradosso d'attrito*. Nota di CLEMENTINA MELLI, presentata dal Socio G. A. MAGGI.

Lo studio teorico del movimento di un albero (cilindro rotondo) omogeneo, pesante, che ruota rapidamente intorno al proprio asse, posato orizzontalmente sopra due cuscinetti (tangente internamente ad una superficie cilindrica rotonda) con attrito radente, dà per risultato una serie di oscillazioni dell'asse, tendenti, col crescere del tempo, al riposo, in quella posizione che si suol determinare direttamente, impostando la ricerca sotto il puro aspetto statico. Ho sviluppato questo studio in un breve articolo destinato al « Nuovo Cimento ». In questa assai più breve Nota mi limito a quanto concerne una circostanza del suddetto movimento dell'asse dell'albero, che non mi sembra immeritevole d'attenzione: *l'attrito che promuove il movimento*.

La posizione del mobile, ad ogni istante, si può definire per mezzo di due coordinate libere: le misure φ_1 e φ_2, dell'angolo che fornisce l'azimut del cilindro mobile, e dell'angolo formato dal semipiano terminato all'asse del cilindro fisso, contenente l'asse del cilindro mobile, col semipiano verticale volto in basso, da intendersi ambedue crescenti rispetto ad un senso concorde dei relativi assi.

Valendosi della seconda forma delle equazioni dinamiche di Lagrange, o formando le equazioni pure corrispondenti ai relativi atti di movimento virtuale, posto

$$\omega_1 = \frac{d\varphi_1}{dt}, \qquad \omega_2 = \frac{d\varphi_2}{dt},$$

si trovano le equazioni differenziali del movimento

$$ma\frac{d\omega_2}{dt} = -mg \operatorname{sen} \varphi_2 - \frac{V}{|V|}\mu R' \tag{1}$$

$$I\frac{d(\omega_1+\omega_2)}{dt} = M^* - r\frac{V}{|V|}\mu R' \tag{2}$$