ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE

DEI LINCEI

ANNO CCCXX

1923

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXXII.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1923

Quando $n = 3$ i coefficienti delle $z^{(r)}$ nei secondi membri delle precedenti sono identicamente nulli, e nelle

$$A'_{ikl} = A_{ikl}, \tag{12}$$

che se ne deducono, si hanno le condizioni d'integrabilità delle (8).

L'invarianza del sistema $A_{rst}(n = 3)$ per una trasformazione conforme della varietà a cui si connette, era nota; ma la deduzione che qui abbiamo fatto delle (12) attribuisce a queste equazioni il carattere di condizioni, non solo necessarie, ma anche *sufficienti* per la rappresentabilità conforme di due varietà a tre dimensioni l'una sull'altra.

Meccanica. — *Di un paradosso d'attrito.* Nota di CLEMENTINA MELLI, presentata dal Socio G. A. MAGGI.

Lo studio teorico del movimento di un albero (cilindro rotondo) omogeneo, pesante, che ruota rapidamente intorno al proprio asse, posato orizzontalmente sopra due cuscinetti, (tangente internamente ad una superficie cilindrica rotonda) con attrito radente, dà per risultato una serie di oscillazioni dell'asse, tendenti, col crescere del tempo, al riposo, in quella posizione che si suol determinare direttamente, impostando la ricerca sotto il puro aspetto statico. Ho sviluppato questo studio in un breve articolo destinato al « Nuovo Cimento ». In questa assai più breve Nota mi limito a quanto concerne una circostanza del suddetto movimento dell'asse dell'albero, che non mi sembra immeritevole d'attenzione: *l'attrito che promuove il movimento.*

La posizione del mobile, ad ogni istante, si può definire per mezzo di due coordinate libere: le misure φ_1 e φ_2, dell'angolo che fornisce l'azimut del cilindro mobile, e dell'angolo formato dal semipiano terminato all'asse del cilindro fisso, contenente l'asse del cilindro mobile, col semipiano verticale volto in basso, da intendersi ambedue crescenti rispetto ad un senso concorde dei relativi assi.

Valendosi della seconda forma delle equazioni dinamiche di Lagrange, o formando le equazioni pure corrispondenti ai relativi atti di movimento virtuale, posto

$$\omega_1 = \frac{d\varphi_1}{dt}, \qquad \omega_2 = \frac{d\varphi_2}{dt},$$

si trovano le equazioni differenziali del movimento

$$ma\frac{d\omega_2}{dt} = -mg \operatorname{sen} \varphi_2 - \frac{V}{|V|}\mu R' \tag{1}$$

$$I\frac{d(\omega_1 + \omega_2)}{dt} = M^* - r\frac{V}{|V|}\mu R' \tag{2}$$

dove m, r e I indicano la massa, il raggio e il momento d'inerzia, rispetto all'asse, del cilindro mobile, a la distanza dei due assi, M* il momento, rispetto all'asse del cilindro mobile, delle azioni motrici e delle resistenze, oltre l'attrito radente, il cui risultante è supposto nullo, R' la grandezza del risultante delle pressioni vincolari normali, nei punti della generatrice di contatto; infine posto:

$$V = r(\omega_1 + \omega_2) + a\,\omega_2\,,$$

con che V rappresenta la misura della velocità dei suddetti punti di contatto, secondo la tangente alla sezione verticale, volta nel senso in cui è inteso crescere la misura φ_2.

Eliminando nella (1) il fattore, R', per mezzo di:

$$ma\,\omega_2^2 = -\,mg\cos\varphi_2 + R'$$

si ottiene,

$$(3)\qquad \frac{d\omega_2}{dt} = -\frac{g}{a}\left(\sin\varphi_2 + \frac{V}{|V|}\cos\varphi_2\right) - \frac{V}{|V|}\,\mu\,\omega_2^2\,,$$

alla quale vanno aggiunte le condizioni iniziali:

per $t = 0$: $\varphi_2 = 0$ $\omega_2 = 0$, con l'ipotesi
per $t = 0$: $\omega_1 > 0$

vale a dire iniziato il movimento rotatorio del cilindro mobile attorno al proprio asse, mentre questo, in riposo, trovasi nella posizione più bassa possibile; con ciò la pressione d'attrito non è nulla per $t = 0$ ed il cilindro mobile abbandona la suddetta posizione.

Dalle condizioni iniziali, invocando il confronto con la analoga equazione differenziale del pendolo piano, si deduce che $|\omega_2|$ si manterrà costantemente piccolo, per cui, supponendo d'altra parte che ω_1 si mantenga positivo e notevolmente grande, potremo intendere che si mantenga $V > 0$, e per (3) scrivere:

$$(4)\qquad \frac{d\omega_2}{dt} = -\frac{g}{a}(\sin\varphi_2 + \mu\cos\varphi_2) - \mu\,\omega_2^2\,.$$

La posizione d'equilibrio dell'asse del cilindro mobile si deduce da (4) facendovi $\omega_2 = 0$, $\frac{d\omega_2}{dt} = 0$; con che risulta il relativo valore di φ_2 fornito da

$$\sin\varphi_2 + \mu\cos\varphi_2 = 0\,.$$

Sia $-\alpha$ il valore compreso fra 0 e $-\pi$ che verifica la suddetta equazione, avremo:

$$\operatorname{tg}\alpha = \mu\,,$$ per cui la (4) diviene:

$$(5)\qquad \frac{d\omega_2}{dt} = -\frac{g}{a}\,\frac{1}{\cos\alpha}\,\operatorname{sen}(\varphi_2 + \alpha) - \mu\,\omega_2^2$$

la quale, posto $\frac{g}{\cos \alpha} = \gamma$, e $\varphi_2 + \alpha = \theta$, si trasforma in:

$$(6) \qquad \frac{d^2\theta}{dt^2} + \mu \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \frac{\gamma}{a} \sin\theta = 0,$$

e le condizioni iniziali, che valevano per la (3), divengono per questa:

per $t = 0 : \theta = \alpha, \frac{d\theta}{dt} = 0$.

Osservando la (6), si vede che ha la forma di quella equazione che rappresenta il movimento del pendolo nel mezzo resistente, nell'ipotesi che la resistenza sia proporzionale al quadrato della velocità, colla differenza, che, mentre in quella si passa dal movimento ascendente a quello discendente cambiando il segno al coefficiente di $\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$, in questa detto segno rimane invariato, nella premessa ipotesi che sia sempre $V > 0$. Per cui, integrando la (6) con i metodi usati per l'integrazione delle equazioni di quel tipo [1], e tenendo presente l'invariabilità del suddetto segno, potremo determinare e confrontare le ampiezze di θ al termine delle successive semioscillazioni.

Indicando con, $\theta = -\alpha_1$, $\theta = \alpha_2$, le ampiezze di θ al termine della prima e della seconda semioscillazione, integrando la (6) con i metodi detti, e trascurando nei calcoli la seconda potenza di μ che abbiamo supposto molto piccolo, sono giunta ai risultati:

$$\alpha_1 = \alpha + \frac{4\mu}{\operatorname{sen}\alpha}(\operatorname{sen}\alpha - \alpha\cos\alpha),$$

$$\alpha_2 = \alpha_1 - \frac{4\mu}{\operatorname{sen}\alpha_1}(\operatorname{sen}\alpha_1 - \alpha_1\cos\alpha_1),$$

i quali, sviluppando seno e coseno, e trascurando la quarta potenza di α nel valore di α_1, e la quarta potenza di α_1 nel valore di α_2, divengono:

$$(7) \qquad \alpha_1 = \alpha + \frac{4}{3}\mu\alpha^2 \quad ; \qquad (8) \qquad \alpha_2 = \alpha_1 - \frac{4}{3}\mu\alpha_1^2.$$

La (7) esprime che l'ampiezza di θ al termine del movimento ascendente è aumentata della quantità $\frac{4}{3}\mu\alpha^2$, e la (8) che la stessa ampiezza, al termine del movimento discendente, è diminuita della quantità $\frac{4}{3}\mu\alpha_1^2$.

[1] Cfr. Jullien, *Problèmes de Mécanique*, t. I, pag. 423.

Risulta così che, nella prima fase una forza promuove il movimento, nella seconda, lo contrasta; e poichè il senso del movimento ascendente, conforme alle condizioni iniziali, è quello negativo, ossia quello della pressione d'attrito, mentre il senso del movimento discendente è quello positivo, potremo concludere che, nel primo caso, la *pressione d'attrito promuove il movimento* dell'asse del cilindro mobile, nel secondo lo contrasta.

Introducendo infine (7) in (8), otteniamo:

$$\alpha_2 = \alpha - \frac{32}{9}\mu^2\alpha^3, \tag{9}$$

dalla quale si desume che il movimento oscillatorio, dopo una serie di oscillazioni, sensibilmente si estingue.

Fisica matematica. — *Sull'interpretazione del Principio della Relatività ristretta nella fisica classica.* Nota di PAOLO STRANEO, presentata dal Socio A. DI LEGGE.

Discutendo i fondamenti della teoria della relatività ristretta, varî autori affermano chiaramente, altri lasciano sottintendere, che per render conto di quel *principio di relatività* che l'esperienza ha dimostrato esistere, oltre che per i fenomeni meccanici, anche per quelli elettromagnetici, sia assolutamente necessario abbandonare lo sfondo classico della fisica ed assumere in sua vece quello einsteiniano.

Per quanto io pensi che coloro che hanno seguito con sufficiente senso fisico lo sviluppo di queste teorie debbano esser convinti che quest'affermazione sia fondata su un'equivoco, credo conveniente, dato il ripetersi di essa, anche in recenti trattati di notevole importanza, di trattare brevemente in questa Nota la delicata questione.

Ricerco perciò dapprima la causa dell'equivoco, che non esito ad attribuire ad un'erronea valutazione dal fatto che non sia mai stata data *neppur una* completa interpretazione esplicita, quasi direi meccanica, del principio di relatività nello sfondo classico.

In seguito, pur osservando che la rilevata deficienza non dimostra ancora affatto l'impossibilità di poter interpretare il principio secondo la fisica classica, tronco senz'altro la questione deducendo *una completa interpretazione esplicita*, che, come d'altra parte era prevedibile, non è neppur *meccanica*, ma semplicemente *cinematica*.

In questo modo credo colmata una piccola lacuna, che era però una non dubbia causa di errata valutazione del significato fisico della teoria della relatività.