ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE
DEI LINCEI

ANNO CCCXX

1923

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXXII.

1° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1923

Idromeccanica. — *Sull' influenza della viscosità nei moti piani irrotazionali dei liquidi naturali. - Moti in un canale.* Nota di Umberto Cisotti, presentata dal Socio T. Levi-Civita.

1. *Equazioni dell' idromeccanica piana di un liquido viscoso.* — Sia ν il coefficiente di viscosità di un liquido di densità unitaria, soggetto a forze conservative di potenziale unitario U. Se ψ rappresenta *la funzione di corrente* di Stokes, le componenti cartesiane della velocità, nel moto piano, sono definite notoriamente dalle relazioni

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad , \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \tag{1}$$

Introducendo il determinante jacobiano di ψ e $\Delta_2 \psi = \dfrac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}$

$$\mathrm{D} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \psi}{\partial x} & \dfrac{\partial \Delta_2 \psi}{\partial x} \\ \dfrac{\partial \psi}{\partial y} & \dfrac{\partial \Delta_2 \psi}{\partial y} \end{vmatrix},$$

la funzione ψ, del tempo t e di x, y, deve soddisfare all'equazione indefinita [1]

$$\Delta_2 \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} - \nu \, \Delta_2 \psi \right) = \mathrm{D}. \tag{2}$$

La distribuzione delle pressioni risulta definita, mediante ψ, nel modo seguente [1]: designino Φ_t e Φ_n le componenti, tangenziale e normale, della pressione che si esercita sopra un elemento lineare ds, normale a dn (la coppia ds, dn risulti orientata in modo congruente alla coppia di assi cartesiani di riferimento); si ha

$$\Phi_t = \nu \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial s^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial n^2} \right) \quad , \quad \Phi_n = p + 2\nu \frac{\partial^2 \psi}{\partial s \, \partial n}, \tag{3}$$

essendo p definito dalla relazione

$$\begin{aligned} &\int_{x_0}^{x} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial t \, \partial y} - \nu \frac{\partial \Delta_2 \psi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \cdot \Delta_2 \psi \right) dx + \\ &+ \int_{y_0}^{y} \left(-\frac{\partial^2 \psi}{\partial t \, \partial x} + \nu \frac{\partial \Delta_2 \psi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \cdot \Delta_2 \psi \right)_{x = x_0} dy + \frac{1}{2} (\Delta_1 \psi)^2 + p - \mathrm{U} = \\ &= \text{funzione di } t, \end{aligned} \tag{4}$$

con x_0, y_0 costanti arbitrarie e, al solito, $(\Delta_1 \psi)^2 = \left(\dfrac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 + \left(\dfrac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2$.

[1] Cfr. la mia Nota, *Sulle equazioni del moto piano dei liquidi viscosi* [Rendiconti del R. Ist. lombardo di scienze e lettere, vol. LVI (1923), in corso di stampa].

2. *Moto irrotazionale.* — Se il moto è irrotazionale, chiamando φ il *potenziale di velocità*, si ha

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \tag{5}$$

per cui, per le (1),

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \tag{6}$$

e quindi

$$\Delta_2 \varphi = \Delta_2 \psi^1 = 0, \tag{7}$$

con che la (2) risulta identicamente soddisfatta.

Per queste e per le (6), la (4) dà luogo alla relazione di Bernoulli

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} \mathrm{V}^2 + p - \mathrm{U} = \text{funzione di } t, \tag{8}$$

avendo posto

$$\mathrm{V}^2 = u^2 + v^2 = (\Delta_1 \psi)^2 = (\Delta_1 \varphi)^2.$$

Si rilevi che, per (7), è ora

$$\Delta_2 \psi = \frac{\partial^2 \psi}{ds^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial n^2} = 0,$$

e che, per le (6), è

$$\frac{\partial \varphi}{\partial s} = \frac{\partial \psi}{\partial n},$$

per cui le (3), pei moti irrotazionali, possono scriversi

$$\Phi_t = 2\nu \frac{\partial^2 \psi}{\partial s^2}, \quad \Phi_n = p + 2\nu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial s^2}. \tag{9}$$

Nelle equazioni (7) e (8) non comparisce il coefficiente di viscosità ν: esse valgono quindi anche per i fluidi perfetti, cioè non viscosi. Ciò era ben noto. Ed è appunto da attribuirsi probabilmente a questa coincidenza il fatto che nello studio del moto dei liquidi viscosi non si sono mai presi in esame (per quanto io sappia) i moti irrotazionali, considerandoli non caratteristici della natura viscosa del liquido. Le (9) mettono in rilievo che, in generale, *anche per i moti irrotazionali di liquidi viscosi la viscosità interviene nella distribuzione degli sforzi.*

Come questa dipendenza degli sforzi dalla viscosità possa influire sopra l'andamento di tutto il fenomeno di movimento mi propongo di mettere in rilievo riprendendo in esame, in primo luogo, il problema espresso dal titolo del numero che segue. Mostrerò in seguito l'influenza della viscosità nei fenomeni di efflusso.

3. *Moto di un liquido viscoso pesante in un canale a fondo orizzontale.* — Riferiamoci nel piano verticale del moto, come al solito, a una coppia di assi cartesiani coll'asse x coincidente col fondo del canale e l'asse y verticale ascendente. Sia l il pelo libero che, allo stato di equilibrio del liquido, è una retta orizzontale, la cui distanza dal fondo indicheremo con h. Se il liquido è in movimento, l è, in generale, variabile col tempo t e il moto ha luogo nella striscia indefinita determinata dal fondo $y = 0$ e dal pelo libero l.

Le equazioni indefinite sono le (7), (8) e (9), dove ora è

$$(10) \qquad \mathrm{U} = -gy \qquad (g = \text{valore dell'accelerazione di gravità}).$$

Le condizioni ai limiti riguardano il *fondo* e il *pelo libero*.

4. *Condizioni al fondo.* — Supporremo che il fondo si comporti come se fosse perfettamente levigato, il che implica, per la prima delle (9), che sia

$$(11) \qquad \Phi_t = 0 \quad , \quad \text{per } y = 0 \quad \text{e qualunque } t.$$

D'altra parte, trattandosi di linea di flusso, si esige che debba essere ψ costante lungo esso; assumendosi, com'è lecito, nullo il valore della costante, si può esprimere che deve essere

$$(12) \qquad \psi = 0 \quad , \quad \text{per } y = 0 \quad \text{e qualunque } t.$$

Avuto riguardo alla prima delle (9), per la (12) risulta soddisfatta la condizione (11), cioè la (11) è inclusa nella condizione (12).

5. *Condizioni al pelo libero.* — Supporremo il pelo libero l a contatto con l'aria atmosferica e quindi soggetto a una pressione normale e costante quando l'atmosfera è calma; quando l'atmosfera è agitata (trattandola come un fluido perfetto), supporremo l ancora sottoposto a una pressione normale e uniforme, pur potendo variare la sua intensità da istante a istante.

In sostanza si esige che, per la continuità delle pressioni attraverso l, sia nel caso più generale,

$$(13) \qquad \Phi_t = 0 \quad , \quad \Phi_n = \text{funzione di } t \quad , \quad \text{sopra } l.$$

D'altra parte se, rispetto al sistema di riferimento, vi è un flusso della massa liquida del canale, il pelo libero l è linea di flusso e sui suoi punti ψ deve, ad ogni istante, mantenere lo stesso valore (variabile eventualmente da un istante all'altro); indicandolo con $q(t)$, si ha

$$(14) \qquad \psi = q(t) \quad , \quad \text{sopra } l,$$

con che, per la (12), q rappresenta la portata della corrente [1].

[1] Cfr. ad es. Cisotti, *Idromeccanica piana* [Milano, Libreria editrice politecnica (1921); parte prima, n. 34].

Per questa e per la prima delle (9), risulta soddisfatta la prima delle (13), cioè quest'ultima è inclusa nella condizione (14). La seconda delle (13), per la seconda delle (9), e per le (8) e (10), dà luogo alla seguente condizione:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} V^2 - 2\nu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial s^2} + gy = \text{funzione di } t \quad , \quad \text{sopra } l .$$

Si rilevi che, fissato t, lungo $l : \varphi , V , y$ si possono ritenere funzioni dell'arco s (contato positivamente nel senso del flusso, a partire da un punto qualsiasi di l), per cui, notando che $V = \frac{\partial \varphi}{\partial s}$, dalla precedente, derivando prima rispetto ad s, moltiplicando poi per $2V$ e notando che $V \frac{\partial y}{\partial s} = v$ [N. 2], si ottiene in definitiva

$$\frac{\partial V^2}{\partial t} + V \frac{\partial V^2}{\partial s} - 4\nu V \frac{\partial^2 V}{\partial s^2} + 2gv = 0 \quad , \quad \text{sopra } l . \tag{15}$$

In sostanza il problema esige che la funzione armonica φ (o la sua coniugata ψ) sieno tali da soddisfare tanto sul fondo [n. 4; (11) e (12)] quanto sul pelo libero [(13) e (14)] a due condizioni: a priori non sarebbe presumibile di potervi soddisfare con una sola funzione; si presenta però qui la fortunata circostanza, del resto già rilevata, che le due condizioni ai limiti sono compatibili e quindi in realtà si riducono a una sola. La ragione del successo consiste nel fatto che, come mostra la prima delle (9), *lungo una linea di flusso lo sforzo è puramente normale.*

6. *Equazione caratteristica.* — Introduciamo la variabile complessa $z = x + iy$ e le funzioni

$$f = \varphi + i\psi = f(t ; z) \quad , \quad w = u - iv = w(t ; z),$$

legate tra loro dalla classica relazione [1]

$$w = \frac{\partial f}{\partial z} . \tag{16}$$

Poniamo

$$z = hz^\star \quad , \quad f = qf^\star \quad , \quad f^\star = \varphi^\star + i\psi^\star , \tag{17}$$

così che, per la (16),

$$w = \frac{q}{h} \frac{\partial f^\star}{\partial z^\star} = cw^\star , \tag{18}$$

avendo posto altresì

$$c = \frac{q}{h} \quad , \quad w^\star = \frac{\partial f^\star}{\partial z^\star} . \tag{19}$$

[1] Cfr. loco ultimo citato, n. 31.

Così $z^\star$, $f^\star$, $w^\star$ sono puri numeri e c rappresenta la velocità di una corrente di portata q e di profondità h.

Applicando un noto procedimento, si perviene [1] alla seguente equazione nella incognita funzione $w^\star(t\,;f^\star)$:

$$(20)\qquad 2\frac{dc}{dt}+c\left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{c}{h}\frac{\partial}{\partial f^\star}\right)W^{\star 2}-ig\left\{\frac{1}{w^\star(t\,;f^\star+i)}-\frac{1}{w^\star(t\,;f^\star-i)}\right\}=$$

$$=\frac{4\nu c}{h}\,W^\star\cdot\frac{\partial^2 W^\star}{\partial f^{\star 2}}+\frac{4\nu c}{h^2}\left(\frac{\partial W^\star}{\partial f^\star}\right)^2,$$

avendo posto, per brevità,

$$W^\star=\sqrt{w^\star(t\,;f^\star+i)\,.\,w^\star(t\,;f^\star-i)}\,.$$

Il problema dipende da una funzione reale c del tempo t e da una funzione $w^\star(t\,;f^\star)$ reale per $f^\star$ reale e qualunque t, regolare nella striscia $-\infty\leq\varphi\leq+\infty$, $-1\leq\psi^\star\leq 1$, e soddisfacenti all'equazione (20) mista, cioè differenziale e alle differenze finite. Una volta determinati c e $w^\star$, mediante la (18), tenuto conto delle (17), si può ricavare con una quadratura la funzione $f(t\,;z)$, dalla quale si possono poi dedurre tutti gli elementi che caratterizzano il movimento del liquido.

Se la viscosità può ritenersi trascurabile, allora, ponendo $\nu=0$, il secondo membro della (20) risulta nullo e la (20) coincide coll'equazione che ho stabilito nella Nota ultima citata.

Matematica. — *Sur les singularités des séries entières.* Nota di MILOŠ KÖSSLER, presentata dal Corrispondente G. FUBINI.

Pour étudier les singularités de la série entière

$$(1)\qquad f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n\ ,\quad \overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|}=1\,,$$

situées sur la circonférence du cercle de convergence, nous allons employer, au lieu des transformations habituelles $z=\dfrac{x}{1+x}$ ou $z=x+\alpha$, la transformation quadratique $z=x+\varepsilon x^2$, choisissant convenablement ε. Des suites particulières de coefficients, celles pour lesquelles $\lim\limits_{q\to\infty}\sqrt[n_q]{a_{n_q}}=1$, y prennent un rôle remarquable. Dans la Communication présente, je montre la puissance de la méthode en généralisant essentiellement les théorèmes de

[1] Cisotti, *Sul moto variabile nei canali a fondo orizzontale* [questi Rendiconti, vol. XXVIII (1° semestre 1919), pag. 197].