ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE

DEI LINCEI

ANNO CCCXX

1923

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXXII.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1923

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 18 marzo 1923.

F. D'Ovidio, Presidente.

MEMORIE E NOTE DI SOCI

Astronomia. — *Di una nuova formola per determinare la grandezza fotografica delle stelle.* Nota del Corrisp. A. Bemporad.

Per le ricerche intorno alla costituzione dell'universo stellato la determinazione della luminosità o, come dicono gli astronomi, della *grandezza* delle stelle (1), non ha minore importanza della conoscenza della loro posizione o del moto proprio o del tipo spettrale.

Avendo assunto di recente, dalle mani del collega troppo dolorosamente e prematuramente scomparso (2), il lavoro di riduzione di una parte delle lastre del Catalogo fotografico di Catania, che dovranno fornire la posizione esatta di circa 100000 stelle fino alla 11ª grandezza, ho dovuto propormi fra l'altro la questione del modo più conveniente di determinare dalle misure dei diametri delle immagini stellari le grandezze *fotografiche* corrispondenti. Tale

(1) La grandezza stellare viene definita come una funzione logaritmica della intensità luminosa delle stelle e precisamente si pone $G = 1 - \frac{\log i}{0.4}$, intendendo che l'unità di misura per i sia l'intensità luminosa di una stella tipica di 1ª grandezza, come sarebbe, con buona approssimazione, α Aquilae.

(2) Il prof. Bortolo Viaro, fortissima tempra di lavoratore, autore del miglior Catalogo di osservazioni meridiane che l'Italia possegga dopo quelli celebri del Piazzi e del Santini, periva a Catania di morbo violento, dopo un mese appena di direzione, a 52 anni, il 30 agosto 1922.

questione era già stata studiata a Catania, prima con appositi esperimenti fotometrici dal prof. Riccò (¹), poi per via di calcolo dallo scrivente (²). Poichè allora (si parla di 18 anni fa) non si possedevano cataloghi estesi di grandezze fotografiche, era necessario fondarsi sui cataloghi di grandezze visuali (Bonner Durchmusterung) o sui cataloghi fotometrici (Harvard Photometry, Potsdamer Durchmusterung), ponendo particolare attenzione ad escludere le stelle fortemente colorate, cioè rossastre, la cui grandezza fotografica devia sistematicamente dalla grandezza visuale. Oggi invece possediamo nel Draper Catalogue (³) una miniera preziosa che fornisce, fra molti altri dati, anche le grandezze fotografiche di tutte le stelle sino alla 9ª grandezza visuale e talvolta anche oltre. Il Draper Catalogue costituisce dunque oggi il fondamento migliore per la deduzione delle grandezze fotografiche da lastre che, come quelle di Catania contengano, oltre alle stelle del « Draper » anche stelle più deboli sino alla 11ª o 12ª grandezza e sorge allora il problema di trovare la formola più conveniente e il procedimento più rapido per esprimere la relazione fra le grandezze fotografiche desunte dal detto catalogo e i diametri stellari misurati sulle lastre.

Dai calcoli di saggio da me eseguiti a Catania su 35 lastre risultava che fra tutte le formole proposte da varî autori per esprimere la relazione fra i diametri D delle immagini fotografiche e le grandezze stellari G, la formola lineare $G = a - bD$ (proposta dallo Scheiner) era quella che meglio si adattava, almeno in un limitato intervallo e cioè dalla 7ª alla 11ª grandezza. Non si mancava tuttavia di osservare (loc. cit., pag. 57) che molte lastre accusavano dopo la 9ª grandezza una decisa inflessione, verso il basso, della curva rappresentativa dei diametri in funzione delle grandezze, mentre le tre formole di Christie, di Kapteyn e di Charlier (rispettivamente di tipo parabolico, iperbolico e logaritmico) darebbero una curva sempre convessa rispetto ai due assi. La detta inflessione era già stata notata dal Loevy (⁴), la stessa risulta infine dalle nuove misure e riduzioni eseguite dallo scrivente su altre lastre, in base alle grandezze fotografiche del Draper Catalogue. Non si può più dubitare dunque della realtà del fenomeno e ne viene di conseguenza che nessuna delle formole fin qui usate si può adattare a rappresentare la relazione fra i diametri e le grandezze in tutto l'intervallo di oltre 10 grandezze che può essere abbracciato da una lastra. La formola qui proposta risponde invece alla detta condizione, per lo meno in un intervallo di 7 grandezze, come risulterà dagli esempî che passiamo ad esporre.

(¹) A. Riccò, *Lavoro della stazione internazionale nell'Osservatorio di Catania per la carta fotografica del cielo*. Rendic. della R. Acc. dei Lincei, vol. X (1901), e volume XII (1903).

(²) Cfr. Mem. della Soc. degli Spettrosc. Ital., vol. XXXIV, 1905, pag. 53.

(³) Annals of the Observatory of Harvard College, vol. 91 e seguenti.

(⁴) C. R., t. CXXXIV, pag. 381.

Nella seguente breve tabella riportiamo separatamente per le tre lastre n. 200, n. 1321, n. 1987:

a) la misura del diametro stellare D in una scala arbitraria, connessa col micrometro impiegato per le misure delle coordinate rettilinee x, y;

b) la grandezza stellare fotografica G desunta dal Draper Catalogue;

c) il numero di stelle da cui sono dedotti i predetti valori medî di D e di G.

Lastra n. 200			Lastra n. 1321			Lastra n. 1987		
D	G	N	D	G	N	D	G	N
54	6.55	4	35	5.75	1	85	3.26	1
36.5	7.71	4	27.5	7.25	2	31	8.57	4
30.8	8.32	4	24	8.15	4	27.3	8.97	3
27	9.17	4	23.2	8.71	4	24	9.50	3
22	9.70	1	20.7	9.37	6	18	10.03	3
			17.3	10.30	6			
			11.6	11.10	5			

Una curva tracciata a mano libera fra i punti rappresentativi delle coppie di valori D e G (ascisse) ha condotto a queste altre coppie di valori ausiliarî.

G	D	f^{III}	G	D	f^{III}	G	D	f^{III}
6.5	56		6	33.5		4	74	
7.0	44.2		7	28.5		5	62.8	
7.5	37.8		8	25.0		6	52	
8 0	33.9	— 1.7	9	22.0	— 1.0	7	43	— 0.8
8.5	30 8	— 0.3	10	18.5	— 1.0	8	35.5	— 0.9
9.0	28.2	— 1.7	11	13.1	— 1.4	9	27.9	— 0.6
9.5	24.4	— 1.9				10	18.5	— 0.7
10.0	15.0							

Formando le differenze dei varî ordini, si nota che le differenze terze (riportate sotto f^{III}) sono quasi costanti. Dunque la curva rappresentativa della relazione in esame è molto prossimamente una parabola cubica. Il procedimento più semplice per ottenere l'equazione di tale curva è quello di scrivere la formola d'interpolazione di Stirling arrestata al quarto termine

$$f(a+yw) = f(a) + y f^{I}(a) + \frac{y^2}{2} f^{II}(a) + \frac{y^3 - y}{6} f^{III}(a)$$

deducendo i valori di $f^{I}(a)$, $f^{II}(a)$, $f^{III}(a)$ dal quadro delle differenze per un conveniente valore di a.

Assumendo come grandezza media conveniente $a = 8^M$, ossia ponendo

$$g = G - 8^M,$$

si trovano così le formole

(L. 200) $D = 33.9 - 6.234\,g + 2.2\,g^2 - 1.86\,g^3$
(L. 1321) $D = 25.0 - 3.08\,g + 0.25\,g^2 - 0.167\,g^3$
(L. 1987) $D = 35.5 - 7.84\,g - 0.05\,g^2 - 0.108\,g^3$

Le rappresentazioni fornite da queste tre formole pei diametri osservati sono del tutto soddisfacenti, come si può giudicare dai valori che seguono

Lastra n. 200			Lastra n. 1321			Lastra n. 1957		
Diametri		Residui	Diametri		Residui	Diametri		Residui
osservati	calcolati		osservati	calcolati		osservati	calcolati	
54	53.24	+ 0.8	35.0	35.09	— 0.1	85	85.59	— 0.6
36.5	35.89	+ 0.6	27.5	27.52	0.0	31	31.03	0.0
30.8	32.06	— 1.3	24.0	24.54	— 0.5	27.3	27.85	— 0.5
27	26.64	+ 0.4	22.3	22.34	0.0	24	23.49	+ 0.5
22	20.51	+ 1.5	20.8	20.82	0.0	18	18.90	— 0.9
			17.3	18.64	— 1.3			
			11.6	12.88	— 1.3			

Non meno soddisfacente è la rappresentazione ottenuta per le altre lastre finora esaminate:

Lastra n. 240

$$D = 42.6 - 9.22\,g - 1.37\,g^2 - 0.312\,g^3$$

Residui: —0.2 +0.1 —0.3 —2.1 +2.2

Lastra n. 1946

$$D = 28.0 - 5.5\,g + 0.4\,g^2 - 0.8\,g^3$$

Residui: —2.2 +1.6 —0.7 +0.2 +0.4

Lastra n. 1850

$$D = 31.0 - 5.85\,g - 0{,}05\,g^2 - 0.20\,g^3$$

Residui: —0.2 +0.1 +0.7 —0.7 +0.0

Lastra n. 2578

$$D = 35.6 - 7.90\,g + 1.35\,g^2 - 0.25\,g^3$$

Residui: —0.5 +0.7 —1.1 +1.2 +0.4

Lastra n. 1477

$$D = 30.4 - 6.35\,g + 1.45\,g^2 - 0.40\,g^3$$

Residui: —1.8 +2.0 —1.1 —0.1 —0,1 +1.3

Per l'applicazione pratica di queste formole, cioè per convertire i diametri misurati per le singole stelle in grandezze stellari, occorre risolvere per un certo numero di valori di D un'equazione di terzo grado. A ciò si perviene naturalmente con procedimento indiretto, calcolando in modo esatto solo quattro valori di D a regolari intervalli, p. es. per $G = 8^M, 8^M.4, 8^M.8, 9^M.2$. Ottenuta con questi quattro valori la differenza terza (costante) si avranno con semplici addizioni tutti gli altri valori occorrenti, entro i limiti di grandezza abbracciati dalla lastra. Da questi, con due successive interpolazioni nel mezzo, si ricaveranno i valori di D corrispondenti a valori di G di decimo in decimo di grandezza stellare. Infine dalla tabella così formata si otterrà subito, con un qualunque procedimento d'inversione, la serie dei valori γ di G corrispondenti a dati valori di D, coll'approssimazione di $0^M.01$, più che sufficiente per lo scopo pratico che si ha in vista. Riportiamo, a titolo d'esempio, la tabella così ottenuta per la lastra 1321.

D	γ	D	γ	D	γ	D	γ	D	γ
1	12.50	11	11.38	21	9.32	31	6.45	41	5.00
2	12.41	12	11.23	22	9.00	32	6.26	42	4.89
3	12.31	13	11.08	23	8.67	33	6.08	43	4.79
4	12.21	14	10.92	24	8.33	34	5.92	44	4.69
5	12.11	15	10.74	25	8.00	35	5.77	45	4.59
6	12.00	16	10.55	26	7.68	36	5.62	46	4.50
7	11.89	17	10.34	27	7.39	37	5.48	47	4.41
8	11.77	18	10.12	28	7.12	38	5.35	48	4.32
9	11.65	19	9.88	29	6.88	39	5.23	49	4.24
10	11.52	20	9.61	30	6.66	40	5.11	50	4.16

È da avvertire che non per tutte le lastre si può applicare questo procedimento di riduzione che, per quanto assai semplificato mediante i varî artifizi grafici e numerici posti in opera, potrebbe sembrare a ragione alquanto laborioso, quando si tratti di doverlo applicare per migliaia di lastre. Per la deduzione indipendente di una parabola cubica occorre che colle coppie di valori disponibili di D e di G si possano formare almeno quattro punti normali, per ricavarne le quattro costanti della nostra formola. Ma qualche volta si presenta il caso che la lastra contenga appena otto o dieci stelle di grandezza fotografica conosciuta e allora non si possono formare più di due punti normali. Un procedimento che abbiamo trovato molto conveniente per tali casi è quello di applicare i detti due punti normali alla determinazione delle costanti a e b della formola

$$G = a\gamma + b$$

dove γ indica la radice della equazione corrispondente ad una lastra modello (p. es. la 1321) espressa in funzione del diametro D mediante il procedimento d'interpolazione sopra accennato. Naturalmente quando avremo ottenuto le equazioni corrispondenti ad un numero considerevole di lastre, potremo sostituire alla cubica della lastra modello la curva media dedotta da varie lastre, nella quale si potrà sperare che risulti attenuata l'influenza delle anomalie dipendenti dalla deformazione delle immagini per irregolarità di movimento dell'equatoriale, ovvero causate dall'agitazione atmosferica, dalla qualità della emulsione, dagli errori di misura nostri, da quelli, che certo non mancheranno, del Draper Catalogue e simili.

Perchè si possa giudicare del grado di approssimazione raggiunto colla formola cubica, in confronto a quello consentito dalle altre formole, riportiamo qui per disteso i risultati ottenuti colle varie formole per la lastra n. 1477. Si hanno per questa lastra le seguenti coppie di valori normali

G	6.05	7.40	8.03	8.37	9.72	11.20
D	49.5	36.7	29	28	21.5	13
N. di st.	2	3	4	4	4	1

Abbiamo ridotto queste sei coppie di valori di G e D colle formole seguenti:

I.	Form.	lineare (Scheiner)	$G = a_1 - b_1 D$
II.	"	parabolica (Christie)	$G = a_2 - b_2 D$
III.	"	iperbolica (Kapteyn)	$G = a_3(1 + b_3 D)$
IV.	"	logaritmica (Charlier)	$G = a_4 - b_4 \log D$
V.	"	cubica	$D = a + bg + cg^2 + dg^3$

Impiegando per tutte queste formole, fuori che per l'ultima dove riuscirebbe troppo laborioso, il metodo dei minimi quadrati abbiamo ottenuto i seguenti valori delle costanti:

$a_1 = 12{,}70$	$a_2 = 16.58$	$a_3 = 16.20$	$a_4 = 22.74$
$b_1 = 0.143$	$b_2 = 1.523$	$b_3 = 0.0333$	$b_4 = 9.945$
$a = 30.4$	$b = -6.35$	$c = +1.45$	$d = -0.4$

e quindi i seguenti valori delle grandezze G *calcolate*, corrispondenti ai valori di D sopra indicati:

	Grandezze calcolate				
	I	II	III	IV	V
	5.62	5.87	6.12	5.88	6.16
	7.45	7.36	7.29	7.18	7.19
	8.55	8.38	8.24	8.20	3.23
	8.70	8.52	8.38	8.35	8.41
	9.63	9.52	9.44	9.49	9.76
	10.84	11.09	11.30	11.66	11.07
Grandezza limite	12.56	15.06	15.68	22.74	12.11

RESIDUI (v) IN CENTESIMI DI GRANDEZZA

	+ 43	+ 18	— 7	+ 17	— 11
	— 5	+ 4	+ 11	+ 22	+ 21
	— 52	— 35	— 21	— 17	— 20
	— 33	— 15	— 1	— 2	— 4
	+ 9	+ 20	+ 28	+ 23	— 4
	+ 36	+ 11	— 10	— 46	+ 13
Σv . . .	— 2	+ 3	0	— 1	— 5
Σvv . . .	0.7044	0.2311	0.1496	0.3711	0.1163

Abbiamo calcolato anche i valori della *grandezza limite*, ossia della grandezza che risulterebbe secondo ciascuna formola di riduzione per le stelle di diametro minimo ($D = 1$). Come si vede, la sola formola cubica e la lineare forniscono valori accettabili per questa grandezza limite, essendo assolutamente da escludere che con soli cinque minuti di posa si possano fotografare stelle di 15ª, meno che mai quelle di 22ª, visto che solo coi più potenti riflettori e con pose prolungate di parecchie ore si riesce a distinguere appena un barlume delle stelle ritenute di 20ª grandezza. Solo per questo fatto dunque la formola parabolica, l'iperbolica e la logaritmica sono senz'altro da escludere. Esaminando poi le somme dei quadrati dei residui, appaiono inaccettabili, sotto questo solo aspetto, la formola lineare e la logaritmica, scadente la parabolica, tollerabile la iperbolica, migliore di tutte in ogni caso la formola cubica. Anche le altre lastre qui esaminate, e particolarmente la 1321 che contiene un maggior numero di stelle, confermano questi risultati. Nell'atto di licenziare queste pagine, possiamo aggiungere che la formola è stata applicata finora, con buoni risultati, a circa 40 lastre.

NOTE PRESENTATE DA SOCI

Analisi. — *Sulle serie di funzioni.* Nota di GIUSEPPE BELARDINELLI, presentata dal Socio S. PINCHERLE.

In due Note precedenti (¹) ho studiato la serie della forma

$$f(x) = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{c_n}{p_n(x)}, \tag{1}$$

ove $p_n(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \ldots (x - \alpha_n)$, nel caso che i punti $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n, \ldots$ siano su una circonferenza con centro nell'origine e raggio uno e formino su questa un aggregato denso. Ho dimostrato, in questa ipotesi e sotto certe condizioni a cui debbono soddisfare i coefficienti c_n, nella prima Nota che la circonferenza è linea singolare essenziale per la $f(x)$, nella

(¹) Rend. Accad. dei Lincei, vol. XXXI, pp. 178 e 429.