ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

ANNO CCCXX

1923

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXXII.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1923

RESIDUI (v) IN CENTESIMI DI GRANDEZZA

	+ 43	+ 18	— 7	+ 17	— 11
	— 5	+ 4	+ 11	+ 22	+ 21
	— 52	— 35	— 21	— 17	— 20
	— 33	— 15	— 1	— 2	— 4
	+ 9	+ 20	+ 28	+ 23	— 4
	+ 36	+ 11	— 10	— 46	+ 13
Σv . . .	— 2	+ 3	0	— 1	— 5
Σvv . . .	0.7044	0.2311	0.1496	0.3711	0.1163

Abbiamo calcolato anche i valori della *grandezza limite*, ossia della grandezza che risulterebbe secondo ciascuna formola di riduzione per le stelle di diametro minimo ($D = 1$). Come si vede, la sola formola cubica e la lineare forniscono valori accettabili per questa grandezza limite, essendo assolutamente da escludere che con soli cinque minuti di posa si possano fotografare stelle di 15^a, meno che mai quelle di 22^a, visto che solo coi più potenti riflettori e con pose prolungate di parecchie ore si riesce a distinguere appena un barlume delle stelle ritenute di 20^a grandezza. Solo per questo fatto dunque la formola parabolica, l'iperbolica e la logaritmica sono senz'altro da escludere. Esaminando poi le somme dei quadrati dei residui, appaiono inaccettabili, sotto questo solo aspetto, la formola lineare e la logaritmica, scadente la parabolica, tollerabile la iperbolica, migliore di tutte in ogni caso la formola cubica. Anche le altre lastre qui esaminate, e particolarmente la 1321 che contiene un maggior numero di stelle, confermano questi risultati. Nell'atto di licenziare queste pagine, possiamo aggiungere che la formola è stata applicata finora, con buoni risultati, a circa 40 lastre.

NOTE PRESENTATE DA SOCI

Analisi. — *Sulle serie di funzioni.* Nota di GIUSEPPE BELARDINELLI, presentata dal Socio S. PINCHERLE.

In due Note precedenti [1] ho studiato la serie della forma

$$(1) \qquad f(x) = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{c_n}{p_n(x)},$$

ove $p_n(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \dots (x - \alpha_n)$, nel caso che i punti $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n, \dots$ siano su una circonferenza con centro nell'origine e raggio uno e formino su questa un aggregato denso. Ho dimostrato, in questa ipotesi e sotto certe condizioni a cui debbono soddisfare i coefficienti c_n, nella prima Nota che la circonferenza è linea singolare essenziale per la $f(x)$, nella

[1] Rend. Accad. dei Lincei, vol. XXXI, pp. 178 e 429.

seconda che mediante integrazione della $f(x)$ si possono ottenere funzioni monogene, nel senso di Borel, multiformi non analitiche in cui l'insieme delle determinazioni in ciascun punto non è numerabile. In questa Nota tratto della trasformazione delle serie $f(x)$ in serie della forma

$$\text{(2)} \qquad \varphi(x) = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{A_n}{x - \alpha_n} \quad (^1)$$

e dimostro il teorema:

« *Dato un aggregato di punti* $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n, \ldots$ *denso su una* « *circonferenza con centro nell'origine e raggio uno, ed una successione* « *ologena di numeri* $c_1, c_2, c_3, \ldots, c_n, \ldots$ (*tale cioè che* $\lim_{n=\infty} \left| \sqrt[n]{c_n} \right| = 0$), « *la serie*

$$f(x) = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{c_n}{(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_n)}$$

« *rappresenta nell'area interna alla circonferenza una funzione analitica* « $\psi(x)$, *nell'area esterna un'altra funzione analitica* $\psi_1(x)$, *e la cir-* « *conferenza per* $\psi(x)$ *e* $\psi_1(x)$ *è linea singolare essenziale* ».

Consideriamo una serie della forma (1) tale che $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n \ldots$ si trovino su una circonferenza c di centro nell'origine 0 e raggio uno, e che $\lim_{n=\infty} \left| \sqrt[n]{c_n} \right| = 0$. In corrispondenza ai c_n si prendano dei numeri arbitrari u_n positivi e minori d'uno tali però che $\sum_{n=1}^{n=\infty} u_n$ sia convergente e che da un certo indice sia $u_n > k \left| \sqrt[n]{c_n} \right|$, con $k > 1$. Descriviamo per ogni α_n una circonferenza di centro α_n e raggio u_n, circonferenza che possiamo indicare con (u_n), ed analogamente alle Note precedenti, determiniamo l'area indicata con A, nella quale la funzione $\dfrac{1}{1 - \dfrac{x}{\alpha_n}}$ sarà sviluppabile in serie di Goursat $\sum_{n=1}^{n=\infty} P_r\left(\dfrac{x}{\alpha_n}\right)$ uniformemente ed assolutamente convergente ed avrà un massimo valore assoluto M_n. Similmente facciamo per tutti i punti α_n.

(1) Cfr. S. Pincherle, *Sur les séries de fonctions*, Journal de Sciencias Mathematicas e Astronomicas, Coimbra, 1896, pag. 139. Per le serie $\sum_{n=1}^{n=\infty} \dfrac{A_n}{x - \alpha_n}$, cfr. Boll. Un. mat. ital., 1922, pag. 70; Borel, *Leçons sur les fonctions monogènes*, Gauthier-Villars, 1917; Poincaré, Acta Societatis Fennicæ, t. 12; Goursat, Bulletin des Sciences Math., 1887.

Ora si ha che:

$$|f(x)| = \left| \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{c_n}{p_n(x)} \right| \leq \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{|c_n|}{|p_n(x)|} \leq \sum_{n=1}^{n=\infty} |c_n| \, M_1 \, M_2 \ldots M_n =$$

$$= \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{|c_n|}{u_1 \, u_2 \ldots u_n}$$

ed essendo il $\lim\limits_{n=\infty} |\sqrt[n]{c_n}| = 0$ e da un certo indice in poi $u_n > k |\sqrt[n]{c_n}| \; (k > 1)$, l'ultima serie sarà convergente, onde $f(x)$ è assolutamente ed uniformemente convergente all'interno ed all'esterno della circonferenza c di centro nella origine e raggio uno. Inoltre avendo circondato i punti α_n con cerchi (u_n) tali che $\sum\limits_{n=1}^{n=\infty} u_n$ sia convergente esisterà un'infinità non numerabile di raggi entro ogni angolo Θ avente il vertice in 0, raggi oltrepassanti la circonferenza c e non passanti per alcun punto α_n (raggi di convergenza di Borel) tali che su di essi la serie (1) sarà pure assolutamente ed uniformemente convergente. Dico che nelle condizioni poste per i coefficienti c_n i punti $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n, \ldots$ sono punti singolari per la (1).

Per la dimostrazione trasformiamo queste serie (1) nelle (2); problema trattato dal prof. Pincherle, nella Nota citata, nel caso che $\lim\limits_{n=\infty} |\alpha_n| = \infty$ e che presenta, nel caso che trattiamo, maggiori difficoltà.

Il termine generale della (1) può scriversi

$$\frac{c_n}{p_n(x)} = \frac{c_n}{p'_n(\alpha_1)(x-\alpha_1)} + \frac{c_n}{p'_n(\alpha_2)(x-\alpha_2)} + \cdots + \frac{c_n}{p'_n(\alpha_n)(x-\alpha_n)}$$

e supponendo d'aver fatta questa trasformazione per ogni singolo termine della (1), si ottiene un quadro in cui questo termine generale rappresenta la linea ennesima, e si trova che:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{n=\infty} \left(\frac{c_n}{p'_n(\alpha_1)(x-\alpha_1)} + \right. \tag{3}$$

$$\left. + \frac{c_n}{p'_n(\alpha_2)(x-\alpha_2)} + \cdots + \frac{c_n}{p'_n(\alpha_n)(x-\alpha_n)} \right) .$$

Formalmente si ha:

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{c_n}{p_n(x)} = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{A_n}{x-\alpha_n} ,$$

ove

$$A_n = \frac{c_n}{p'_n(\alpha_n)} + \frac{c_{n+1}}{p'_{n+1}(\alpha_n)} + \cdots + \frac{c_{n+r}}{p'_{n+r}(\alpha_n)} + \cdots$$

Le serie

$$\sum_{n=p}^{n=\infty} \frac{c_n}{p'_n(\alpha_p)} \qquad (p = 1, 2, 3, \ldots\ldots)$$

sono tutte convergenti, essendo serie della forma (1) ove alle x sono stati sostituiti punti della circonferenza che non compariscono nell'aggregato dei punti che si trovano nei denominatori, e si avrà

$$\frac{1}{|x-\alpha_p|} \frac{|c_n|}{|p'_n(\alpha_p)|} < \frac{|c_n|}{u_1 \,.\, u_2 \ldots . \, u_n},$$

onde il termine generale della (3) sarà minore del termine generale della serie $\sum_{n=1}^{n=\infty} n \frac{c_n}{u_1 u_2 \ldots u_n}$, convergente per le ipotesi sulla successione $|\sqrt[n]{c_n}|$ e su quella dei numeri u_n. Per modo che possiamo eseguire nel detto quadro la somma per colonne ed otteniamo una serie convergente. Se facciamo $x = 0$ nel quadro, otteniamo che

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} |A_n|$$

è convergente, onde abbiamo che la serie

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{A_n}{x-\alpha_n},$$

per il teorema di Poincaré-Goursat (¹), è assolutamente uniformemente convergente all'interno ed all'esterno della circonferenza c ed i punti α_n sono punti singolari; la trasformazione formale prima eseguita della serie (1) in (2) è anche effettiva. Possiamo quindi enunciare il teorema:

« Dato un aggregato di punti

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n, \ldots$$

« denso su una circonferenza di centro nell'origine e raggio uno ed un aggregato di numeri

$$c_1, c_2, c_3, \ldots, c_n, \ldots$$

« tale che il limite della successione $|\sqrt[n]{c_n}|$ sia uguale allo zero, la serie

$$f(x) = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{c_n}{(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_n)}$$

« rappresenta nell'area interna al cerchio una funzione analitica $\psi(x)$, nell'area esterna un'altra funzione analitica $\psi_1(x)$ e la circonferenza è linea « singolare essenziale ».

(¹) Cfr. Note citate.

Naturalmente si può estendere questo teorema supponendo che i punti $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n, \ldots$ siano distribuiti su una curva chiusa od aperta γ, e sia denso su questa, oppure supponendo che l'aggregato α_n sia distribuito su r curve chiuse. Così se è distribuito su r curve chiuse $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \ldots, \gamma_r$, non intersecantesi la serie (1) definisce $r+1$ funzioni analitiche e ciascuna di queste ammette come spazio lacunare o l'interno o l'esterno della curva che si considera. Se poi i contorni $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_r$ non sono chiusi, ma segmenti di curve, allora la serie (1) definisce una funzione analitica regolare in tutto il piano eccetto questi segmenti che sono linee singolari per la funzione. Si potrebbero moltiplicare gli esempi, se supponiamo per esempio, che l'aggregato α_n sia costituito da tutti i numeri razionali, e che $c_n = \frac{1}{n!}$, si avrà che la serie

$$f(x) = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n!\,(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_n)}$$

rappresenta due funzioni analitiche distinte regolari una al disopra e l'altra al disotto dell'asse x, l'asse x essendo per entrambe una linea singolare.

Matematica. — *Un nuovo criterio per rendere normali gli integrali abeliani.* Nota di MARIA TERESA ZAPELLONI, presentata dal Socio G. CASTELNUOVO.

Nella teoria classica di Riemann si definiscono come normali gli integrali abeliani di 1ª specie che hanno tutti nulli i periodi relativi ai p tagli di tipo A della superficie riemanniana, tranne uno, che si può ridurre ad una costante determinata (in generale 1, o πi); e gli integrali abeliani di 2ª specie che hanno per unica singolarità un polo di 1° ordine, con residuo 1, in un punto ξ, η, e tutti nulli i p periodi relativi ai p tagli A.

Con queste definizioni, gli integrali normali di 1ª e 2ª specie relativi ad una curva

$$f(z, w) = 0 \tag{1}$$

sono determinati, quando siano fissate le p retrosezioni che rendono semplicemente connessa la superficie di Riemann corrispondente.

Ma, cambiando i tagli, variano i periodi, e quindi variano gli integrali normali.

Può essere opportuno, in qualche ricerca, stabilire un criterio di normalità che non dipenda dalla scelta dei tagli.