ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

ANNO CCCXX

1923

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXXII.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1923

Naturalmente si può estendere questo teorema supponendo che i punti $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n, \ldots$ siano distribuiti su una curva chiusa od aperta γ, e sia denso su questa, oppure supponendo che l'aggregato α_n sia distribuito su r curve chiuse. Così se è distribuito su r curve chiuse $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \ldots, \gamma_r$, non intersecantesi la serie (1) definisce $r+1$ funzioni analitiche e ciascuna di queste ammette come spazio lacunare o l'interno o l'esterno della curva che si considera. Se poi i contorni $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_r$ non sono chiusi, ma segmenti di curve, allora la serie (1) definisce una funzione analitica regolare in tutto il piano eccetto questi segmenti che sono linee singolari per la funzione. Si potrebbero moltiplicare gli esempi, se supponiamo per esempio, che l'aggregato α_n sia costituito da tutti i numeri razionali, e che $c_n = \frac{1}{n!}$, si avrà che la serie

$$f(x) = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n!\,(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_n)}$$

rappresenta due funzioni analitiche distinte regolari una al disopra e l'altra al disotto dell'asse x, l'asse x essendo per entrambe una linea singolare.

Matematica. — *Un nuovo criterio per rendere normali gli integrali abeliani.* Nota di MARIA TERESA ZAPELLONI, presentata dal Socio G. CASTELNUOVO.

Nella teoria classica di Riemann si definiscono come normali gli integrali abeliani di 1ª specie che hanno tutti nulli i periodi relativi ai p tagli di tipo A della superficie riemanniana, tranne uno, che si può ridurre ad una costante determinata (in generale 1, o πi); e gli integrali abeliani di 2ª specie che hanno per unica singolarità un polo di 1° ordine, con residuo 1, in un punto ξ, η, e tutti nulli i p periodi relativi ai p tagli A.

Con queste definizioni, gli integrali normali di 1ª e 2ª specie relativi ad una curva

$$(1) \qquad f(z, w) = 0$$

sono determinati, quando siano fissate le p retrosezioni che rendono semplicemente connessa la superficie di Riemann corrispondente.

Ma, cambiando i tagli, variano i periodi, e quindi variano gli integrali normali.

Può essere opportuno, in qualche ricerca, stabilire un criterio di normalità che non dipenda dalla scelta dei tagli.

Definiremo, a tal fine, come integrale abeliano normale di 2ª specie un integrale che abbia come unica singolarità un polo di 1° ordine, con residuo 1, in un punto assegnato ξ, η ed abbia i periodi tutti reali, o tutti immaginari puri, integrale sempre esistente e ben determinato.

Supponendo ora di cambiare i tagli sulla superficie di Riemann, avremo cicli che sono combinazioni lineari a coefficienti interi dei cicli antichi, ed i periodi nuovi saranno combinazioni lineari a coefficienti interi dei periodi antichi: nel caso nostro, saranno combinazioni lineari a coefficienti interi di quantità tutte reali, o tutte immaginarie pure, e quindi ancora periodi tutti reali o tutti immaginari puri.

Con la nuova definizione, dunque, un integrale normale di 2ª specie è determinato, indipendentemente dal modo con cui sono state eseguite le p retrosezioni.

Per ogni punto ξ, η della curva (1) si avranno così due integrali abeliani normali di 2ª specie: uno con i periodi tutti reali, ed uno con i periodi tutti immaginari puri: avendo essi lo stesso residuo 1 nel loro unico comune polo, la loro differenza sarà un integrale abeliano di 1ª specie. Questo integrale diremo *integrale normale di* 1ª *specie relativo al punto* ξ, η.

A questo integrale è connesso un polinomio aggiunto Φ di grado $n - 3$. La curva $\Phi = 0$ è una curva aggiunta alla (1), e ben definita, una volta che sia assegnato il punto ξ, η; essa dovrà quindi avere proprietà caratteristiche, in relazione a quel punto, rispetto a tutte le altre curve aggiunte alla (1), d'ordine $n - 3$.

Queste proprietà appunto metteremo in luce, trattando la questione nel caso di una curva di genere p qualsiasi

Relativamente a questa curva consideriamo un sistema di p integrali abeliani di 1ª specie, linearmente indipendenti,

$$\mathrm{I}_l = \int \frac{\Phi_l}{f'_w}\, dz \qquad (l = 1, 2, \ldots p).$$

Sulla $f = 0$ fissiamo un punto ξ, η; e sia H un integrale di 2ª specie che abbia un unico polo, posto nel punto ξ, η, e con residuo 1. I suoi $2p$ periodi saranno quantità complesse $\mathrm{P}_k = \mu_k + i\nu_k$.

Anche i p integrali I_l avranno periodi complessi $\omega_{lk} = \omega'_{lk} + i\,\omega''_{lk}$.

Combinando linearmente, mediante parametri $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_p, 1$ (dove $\lambda_k = \lambda'_k + i\,\lambda''_k$) i p integrali di 1ª specie con H, si ottiene un integrale H_1 di 2ª specie, che ha lo stesso polo di H, con lo stesso residuo 1.

Per definire il valore dei parametri λ in modo che i periodi di H_1, che sono del tipo:

$$\sum_1^p{}_k \left(\lambda'_k + i\,\lambda''_k\right)\left(\omega'_{km} + i\,\omega''_{km}\right) + (\mu_m + i\,\nu_m) \qquad (m = 1, 2, \ldots 2p)$$

risultino tutti reali, occorre imporre $2p$ condizioni del tipo:

$$\sum_{1}^{p}{}_{k}\left(\lambda'_k\, \omega''_{km} + \lambda''_k\, \omega'_{km}\right) = -\nu_m \tag{2}$$

equazioni risolubili rispetto alle λ, perchè il determinante Δ delle ω'_{lk} ed ω''_{lk}, per la indipendenza degli integrali I_l, è $\neq 0$.

Analogamente, si può fare una combinazione lineare degli stessi integrali, con parametri $\varrho_1, \varrho_2 \ldots \varrho_p, 1$, (dove $\varrho_k = \varrho'_k + i\,\varrho''_k$) e si troverebbe che l'integrale H_2 che così risulta ha periodi tutti immaginari puri se sono soddisfatte le $2p$ condizioni:

$$\sum_{1}^{p}{}_{k}\left(\varrho'_k\, \omega'_{km} - \varrho''_k\, \omega''_{km}\right) = -\mu_m . \tag{2'}$$

La differenza tra H_1 ed H_2 è il nostro integrale J, normale di 1ª specie relativo al punto ξ, η:

$$J = \sum_{1}^{p}{}_{k}\left(\lambda_k - \varrho_k\right) I_k . \tag{3}$$

Tra i relativi polinomi aggiunti d'ordine $n-3$ passa la relazione:

$$\Phi = \sum_{1}^{p}{}_{k}\left(\lambda_k - \varrho_k\right) \Phi_k . \tag{3'}$$

Ora tra questa, e le (2) e (2'), è facile eliminare le parti reali e immaginarie delle λ e delle ϱ. Si arriva così per il polinomio Φ ad un'espressione della forma:

$$C \begin{vmatrix} 0 & \overline{\Phi}_1(\bar\xi, \bar\eta) & \ldots & \overline{\Phi}_p(\bar\xi, \bar\eta) \\ \Phi_1(z, w) & \sum_{1}^{p}{}_{k}\left(\omega_{1,k}\, \overline{\omega}_{1,p+k} - \omega_{1,p+k}\, \overline{\omega}_{1,k}\right) & \ldots & \sum_{1}^{p}{}_{k}\left(\omega_{1,k}\, \overline{\omega}_{p,p+k} - \omega_{1,p+k}\, \overline{\omega}_{p,k}\right) \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \Phi_p(z, w) & \sum_{1}^{p}{}_{k}\left(\omega_{p,k}\, \overline{\omega}_{1,p+k} - \omega_{p,p+k}\, \overline{\omega}_{1,k}\right) & \ldots & \sum_{1}^{p}{}_{k}\left(\omega_{p,k}\, \overline{\omega}_{p,p+k} - \omega_{p,p+k}\, \overline{\omega}_{p,k}\right) \end{vmatrix} \tag{4}$$

dove C è una costante, e le $\overline{\Phi}$ ed $\overline{\omega}$ indicano le quantità complesse coniugate delle Φ e delle ω.

Da quest'espressione del polinomio Φ si possono trarre alcune proprietà della curva aggiunta $\Phi = 0$, connessa con l'integrale normale di 1ª specie relativo al punto ξ, η.

Notiamo anzitutto che il determinante che si ottiene togliendo la 1ª linea e la 1ª colonna al determinante (4) è simmetrico. Basterebbe porre, infatti, al solito, $\omega_{rs} = \omega'_{rs} + i\,\omega''_{rs}$ e tener conto della relazione di Riemann tra i periodi di 2 integrali di 1ª specie.

Per questa via si vede pure che il determinante simmetrico ora considerato risulta formato di elementi tutti immaginari puri; ma se nel determinante (4) dividiamo le ultime p orizzontali per i, e moltiplichiamo poi per i la 1ª verticale, il polinomio $\Phi(z, w)$ ci viene dato da un'espressione del tipo:

$$(5)\quad \Phi(z, w) = C \begin{vmatrix} 0 & \overline{\Phi}_1(\overline{\xi}, \overline{\eta}) & \overline{\Phi}_2(\overline{\xi}, \overline{\eta}) & \dots & \overline{\Phi}_p(\overline{\xi}, \overline{\eta}) \\ \Phi_1(z, w) & \Omega_{1,1} & \Omega_{1,2} & \dots & \Omega_{1,p} \\ \Phi_2(z, w) & \Omega_{2,1} & \Omega_{2,2} & \dots & \Omega_{2,p} \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \Phi_p(z, w) & \Omega_{p,1} & \Omega_{p,2} & \dots & \Omega_{p,p} \end{vmatrix}$$

dove le Ω_{hk} sono tutte reali. Si può anche vedere che esse si possono considerare come i coefficienti di una forma quadratica definita. Basterebbe, per questo, considerare un integrale generico di 1ª specie $J = \lambda_1 I_1 + \lambda_2 I_2 + \dots + \lambda_p I_p$; applicando alle parti reali ed immaginarie dei suoi periodi $\omega_k = \omega'_k + i\,\omega''_k$ la disuguaglianza di Riemann e sostituendo alle ω_k i loro valori, si giunge ad una forma quadratica definita nelle λ:

$$\sum_{1}^{p}{}_{mn} \sum_{1}^{p}{}_{k} \left(\omega'_{m,k}\, \omega''_{n,p+k} - \omega''_{m,k}\, \omega'_{n,p+k} \right) \lambda_m \lambda_n > 0$$

i cui coefficienti non sono che le $\Omega_{m,n}$.

Premesso tutto questo, poniamo $x_h = \Phi_h(z, w)$ e consideriamo i $\Phi_h(z, w)$ come coordinate omogenee di un punto $x(x_1, x_2 \dots x_p)$ in uno spazio S_{p-1} a $p-1$ dimensioni. Così, ad ogni punto z, w della (1) corrisponde un punto x che, al variare di z, w, descrive una curva C d'ordine $2p-2$ in S_{p-1} (lasciando da parte il caso iperellittico).

Analogamente, ponendo $\overline{y}_h = \overline{\Phi}_h(\overline{\xi}, \overline{\eta})$, consideriamo i numeri $\overline{\Phi}_h(\overline{\xi}, \overline{\eta})$ come le coordinate omogenee di un punto $\overline{y}$ complesso coniugato di un punto y della curva C.

Con queste convenzioni, la Φ data dalla (5) si presenta come un polinomio lineare in $x_1, x_2 \dots x_p$, e l'equazione $\Phi = 0$, ossia

$$(6)\quad \begin{vmatrix} 0 & \overline{y}_1 & \overline{y}_2 & \dots & \overline{y}_p \\ x_1 & \Omega_{11} & \Omega_{12} & \dots & \Omega_{1,p} \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ x_p & \Omega_{p1} & \Omega_{p2} & \dots & \Omega_{pp} \end{vmatrix} = 0$$

rappresenta, per ogni punto $\bar{y}$ dato, un iperpiano di S_{p-1}. Essa ci esprime che i punti x, $\bar{y}$, sono coniugati in una polarità definita dalla iperquadrica che ha per discriminante l'aggiunto di $\| \Omega_{hk} \|$.

La (6), che è della forma:

$$\Sigma\, a_{lm} x_l \bar{y}_m = 0 \qquad \text{dove } a_{lm} = \bar{a}_{ml} \text{ (reale)} \tag{7}$$

stabilisce nello spazio S_{p-1} una corrispondenza che fu detta dal Segre *antipolarità*. Si tratta di un'antipolarità priva di punti uniti; e ciò porta che il punto (ξ, η) della curva piana $f(z, w) = 0$ non può mai stare sulla curva aggiunta $\Phi(z, w) = 0$, che ad esso corrisponde.

In conclusione, ritornando alla curva primitiva, si può dire:

nel sistema lineare ∞^{p-1} delle curve aggiunte d'ordine $n-3$ ad una curva piana d'ordine n e genere p, o nel sistema lineare dei relativi integrali abeliani di 1ª specie, rimane determinata in modo invariante un'antipolarità, in virtù della quale ad ogni curva aggiunta od integrale corrispondono ∞^{p-2} curve aggiunte od integrali; alle ∞^{p-2} curve aggiunte passanti per un punto ξ. η della curva primitiva corrisponde la curva aggiunta che dà luogo all'integrale abeliano normale di 1ª specie annesso a quel punto.

Si può chiedere quale relazione passi tra i periodi ω, ω' di due integrali antireciproci nel senso stabilito dalla (7). Si trova che la chiesta relazione ha la forma:

$$\sum_k^p \left(\omega_k \, \bar{\omega}'_{p+k} - \omega'_k \, \bar{\omega}_{p+k} \right) = 0 \tag{8}$$

analoga all'eguaglianza di Riemann. Questa relazione può facilmente interpretarsi ricorrendo alla rappresentazione geometrica introdotta dallo Scorza nello studio delle matrici di Riemann.

Abbiamo così stabilito un nuovo criterio di normalità per gli integrali abeliani. Sarebbe facile vedere che per avere un sistema di p integrali abeliani normali di 1ª specie linearmente indipendenti, occorre e basta considerare un gruppo di p punti che non appartenga a serie speciale.