ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

ANNO CCCXX

1923

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXXII.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1923

Geometria. — *Sulla applicabilità proiettiva di una particolare classe di varietà iperspaziali.* — Nota di CARLO BERSANO, presentata dal Corrispondente G. FUBINI.

1. In una Nota in corso di stampa nei Rendiconti dell'Istituto Lombardo di Scienze e Lettere [1] dò le formole per il contatto del 2° e del 3° ordine tra due V_k di S_n e dimostro il seguente teorema: Siano $[x]$ e $[y]$ due V_k di S_n riferite biunivocamente in modo che a punti omologhi spettino eguali valori delle coordinate curvilinee u_r. Se gli S_2 (S_3) osculatori a curve omologhe uscenti da punti omologhi si corrispondono in una collineazione, le due V_k sono proiettivamente applicabili del 2° (del 3°) ordine.

In questa Nota darò un nuovo criterio per la applicabilità del secondo ordine di una particolare classe di varietà iperspaziali. In tutta la Nota le coordinate saranno omogenee. Una V_k luogo del punto $x^{(i)} = x^{(i)}(u_1 u_2 \dots u_k)$ $(i = 0 \dots n \,, n > k)$ sarà chiamata $V_k[x]$. Notazioni analoghe indicheranno varietà analoghe; gli indici in alto indicheranno coordinate omogenee nell'S_n ambiente; gli indici in basso derivazioni essendo

$$x_r^{(i)} = \frac{\partial x^{(i)}}{\partial u_r} \,,\ x_{rs}^{(i)} = \frac{\partial^2 x^{(i)}}{\partial u_r \, \partial u_s} \text{ etc. } \dots$$

2. Con un facile calcolo dal § 3 della mia Nota citata si ricava che condizione perchè due $V_k[x]$ e $[X]$ riferite biunivocamente al modo solito abbiano un punto omologo 0 in comune, e in esso un contatto del secondo ordine, è che esista un sistema di valori delle coordinate curvilinee u_r per cui valgano le:

$$(1)\quad X^{(i)} = \lambda x^{(i)} \,,\ X_r^{(i)} = \lambda(x_r^{(i)} + m_r \, x^{(i)}) \qquad (i = 0 \,, \dots \,, n \,; r \,, s = 1 \dots k)$$

$$X_{rs}^{(i)} = \lambda(x_{rs}^{(i)} + \pi_r \, x_s^{(i)} + \pi_s \, x_r^{(i)} + \tau_{rs} \, x^{(i)})$$

essendo

$$\lambda = \frac{x^{(0)}}{X^{(0)}} \,,\ m_r = \frac{1}{x^{(0)}} x_r^{(0)} - \frac{1}{X^{(0)}} X_r^{(0)} \,,\ \pi_r = m_r + \sigma_r$$

$$\tau_{rs} = x_{rs}^{(0)} \frac{1}{x^{(0)}} - X_{rs}^{(0)} \frac{1}{X^{(0)}} - \pi_r \, X_s^{(0)} \frac{1}{X^{(0)}} - \pi_s \, X_r^{(0)} \frac{1}{X^{(0)}}$$

dove σ_r sono i coefficienti che compariscono nelle formule espresse in coordinate *non* omogenee. Se $\pi_r = m_r$ il contatto è analitico, essendo in tal caso $\sigma_r = 0$.

[1] Contatti del secondo e del terzo ordine tra varietà iperspaziali. Il teorema del testo è dovuto, nel caso del secondo ordine e delle V_2 di S_3, al dott. E. Čech. (Bull. de l'Ac. de Sciences de Bohême 1921).

3. Diremo che una V_k di S_n è della *specie* Φ se è soluzione di *una e una sola* equazione differenziale del secondo ordine a cono caratteristico non degenere [1]. Siano $[x]$ e $[\eta]$ due tali varietà soddisfacenti rispettivamente alle:

$$\sum_{r,s} A_{rs}\, x_{rs}^{(i)} + \sum_{p} A_p\, x_p^{(i)} + A\, x^{(i)} = 0 \tag{2}$$

$$\sum_{r,s} B_{rs}\, \eta_{rs}^{(i)} + \sum_{p} B_p\, \eta_p^{(i)} + B\, \eta^{(i)} = 0 \,. \tag{3}$$

$$\begin{pmatrix} r\,,s = 1 \dots k \\ i = 0\,,1\,,\dots\,,n \end{pmatrix}$$

Preciseremo meglio le nostre ipotesi, dicendo che esse equivalgono a supporre che siano differenti da zero i determinanti delle A_{rs}, B_{rs} e che il dare i valori delle x (o delle η) e le loro derivate prime e seconde, determini per (2) [o per (3)] completamente i valori delle A (o delle B). Le due V_k $[x]$ e $[\eta]$ siano riferite biunivocamente in modo che punti omologhi abbiano identiche coordinate curvilinee u_r. Di più le due V_k siano tali che in questa corrispondenza si corrispondano le generatrici dei coni caratteristici uscenti da due punti omologhi 0 e $0'$. Dico che *le due V_k sono proiettivamente applicabili del secondo ordine.* Mutiamo con una omografia la $V_k[\eta]$ in un'altra $[\xi]$ in modo che $0'$ vada in 0 e le generatrici del cono caratteristico di $[\eta]$ vadano nelle loro omologhe. $[x]$ e $[\xi]$ avranno così un punto (0) in comune e in questo punto lo stesso cono caratteristico. La $V_k[\xi]$ soddisferà evidentemente alla stessa equazione differenziale cui soddisfa la $V_k[\eta]$; sarà inoltre — per la coincidenza dei due coni caratteristici — $A_{rs} = B_{rs}$. La $V_k[\xi]$ soddisferà cioè alla:

$$\sum_{r,s} A_{rs}\, \xi_{rs}^{(i)} + \sum_{p} B_p\, \xi_p^{(i)} + B\, \xi^{(i)} = 0 \quad (i = 0\,,1\,,\dots\,,n)\,. \tag{4}$$

Determiniamo delle quantità π_r, τ_{rs}, m_p in modo che siano soddisfatte le:

$$A_p = 2 \sum_{s} A_{ps}\, \pi_s + B_p \quad ; \quad A = \sum_{r,s} A_{rs}\, \tau_{rs} + \sum_{p} m_p\, B_p + B \tag{5}$$

ciò che si può fare perchè il determinante delle A_{rs} è differente da zero. Sostituendo nella (2), alle A_p, A questi loro valori, si trova:

$$\sum_{r,s} A_{rs} \left(x_{rs}^{(i)} + \pi_r\, x_s^{(i)} + \pi_s\, x_r^{(i)} + \tau_{rs}\, x^{(i)} \right) + \\ + \sum_{p} B_p \left(x_p^{(i)} + m_p\, x^{(i)} \right) + B\, x^{(i)} = 0\,. \tag{6}$$

[1] Queste varietà sono la più naturale estensione delle *superficie della specie* Φ introdotte dal prof. C. Segre nella memoria « *Su una classe di superficie degli iperspazii legate con le equazioni alle derivate parziali di 2° ordine* ». Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino, vol. XLII, pag. 1052. A questa classe di superficie appartengono tutte le V_2 di S_4. Delle nostre varietà fa un cenno il prof. Segre stesso negli ultimi paragrafi della Nota citata.

Le $n+1$ equazioni (4) per $i=0,1,\ldots,n$, si possono considerare come un sistema di $n+1$ equazioni omogenee nelle $\frac{1}{2}k(k+3)+1$ incognite A_{rs}, B_r, B. I valori delle incognite che soddisfano a questo sistema e che per ipotesi esistono, debbono soddisfare anche alle (6) le quali, posto:

$$
(7) \qquad X_{rs}^{(i)}=\lambda\left(x_{rs}^{(i)}+\pi_s x_r^{(i)}+\pi_r x_s^{(i)}+\tau_{rs}\,x^{(i)}\right),
$$

$$
X_r^{(i)}=\lambda\left(x_r^{(i)}+m_r\,x^{(i)}\right),\quad X^{(i)}=\lambda\,x^{(i)}
$$

diventano:

$$
(6') \qquad \sum_{r,s}A_{rs}X_{rs}^{(i)}+\sum_p B_p X_p^{(i)}+BX^{(i)}=0\,.
$$

Poichè per ipotesi le $A_{rs}=B_{rs}$, B_p, B sono completamente determinate da (4), dovranno esistere delle quantità a_{ih} (che potranno non essere tutte differenti da zero) tali che sia:

$$
(8) \qquad X_{rs}^{(i)}=\sum_h a_{ih}\,\xi_{rs}^{(h)}\;,\quad X_r^{(i)}=\sum_h a_{ih}\,\xi_r^{(h)}\;,\quad X^{(i)}=\sum_h a_{ih}\,\xi^{(h)}
$$

Queste quantità a_{ih} sono funzioni del punto $(\bar{u}_r)$ della $V_k[\xi]$ che si considera nel senso che ad ogni punto di $[\xi]$ viene a corrispondere una $V_k[X]$. Queste a_{ih} rimangono costanti al variare del punto sulla $V_k[X]$, cioè non mutano quando — fissato il punto in cui coincidono i coni caratteristici — si cerchino i trasformati dei vari punti della $V_k[\xi]$. Ne segue che le prime due formule (8) sono proprio quelle che si ottengono derivando l'ultima, cioè la (7) esprime effettivamente la condizione di contatto del secondo ordine tra la $V_k[x]$ e la $V_k[X]$, trasformata della $[\xi]$ mediante l'omografia (8). Ricordando ora che la $V_k[\xi]$ è una trasformata collinearmente di $[\eta]$, si trae che tale sarà anche $[X]$ ciò che dimostra il nostro enunciato.

Osservando ora che le (5) legano mediante una sola equazione le quantità τ_{rs}, m_p potremo porre $m_p=\pi_p$ ottenendo che: *se due varietà della specie Φ sono geometricamente applicabili del secondo ordine rispetto al gruppo proiettivo, esse sono anche analiticamente applicabili.* Ritroviamo così un risultato che il prof. Fubini [1] aveva dimostrato per le V_2 di S_3 e che io ho dimostrato nella Nota citata per V_k generiche.

4. Sia ora $[\xi]$ una V_k della specie Φ proiettivamente applicabile su una $V_k[x]$. Esisterà per ogni punto di $[\xi]$ una V_k $[X]$ luogo del punto $X^{(i)}=\sum_h a_{ih}\,\xi^{(h)}$ avente con $[x]$ un contatto del secondo ordine. La $V_k[X]$

[1] G. Fubini, *Applicabilità proiettiva di due superficie*. Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, tomo LXI. Vedasi al riguardo il § 5.

soddisferà alla stessa equazione differenziale della $V_k\ [\xi]$. Sarà cioè soddisfatta la

$$(9)\qquad \sum_{r,s} A_{rs} X_{rs}^{(i)} + \sum_p B_p X_p^{(i)} + B X^{(i)} = 0 \quad (i=0,1,\dots,n;\ r,s=1,\dots,k).$$

Inoltre le due $V_k\ [x]$ e $[X]$ sono legate dalle (1). Ne segue per la (9):

$$\sum_{r,s} A_{rs}\, x_{rs}^{(i)} + \sum_p \left[2\sum_s A_{ps}\pi_s + B_p \right] x_p^{(i)} + \\ + \left[\sum_{r,s} A_{rs}\tau_{rs} + \sum_p m_p B_p + B \right] x^{(i)} = 0$$

che dimostra che anche la $V_k\ [x]$ è della specie Φ e che il suo cono caratteristico coincide con quello della $V_k\ [X]$. Cioè che tra le due $V_k\ [x]$ e $[\xi]$ i coni caratteristici sono formati da direzioni omologhe.

Possiamo quindi affermare che: *se due V_k di S_n sono proiettivamente applicabili del secondo ordine e una è della specie Φ, tale è anche l'altra*; e anzi: *condizione necessaria e sufficiente per la applicabilità è che — nella data corrispondenza biunivoca tra le due V_k — i coni caratteristici uscenti da punti omologhi siano generati da direzioni omologhe.*

5. Per le V_2 di S_4 basterà quindi la corrispondenza tra le *due* direzioni caratteristiche perchè se ne possa dedurre l'applicabilità. Cioè due V_2 di S_4 sono proiettivamente applicabili del secondo ordine se — in punti omologhi — le rispettive forme f_2 del prof. Fubini [1] differiscono solamente per un fattore, e viceversa.

Meccanica. — *Sopra i potenziali simmetrici che conducono alle soluzioni longitudinali delle equazioni gravitazionali di Einstein.* Nota di ATTILIO PALATINI, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Sono ben note le ampie classi di soluzioni delle equazioni gravitazionali di Einstein, trovate dal Levi-Civita [2], in corrispondenza a campi statici vuoti. Tra le dette soluzioni hanno speciale interesse le *soluzioni longitudinali* [3] e quelle *binarie di Weyl* [4]: le prime perchè ad esse appartiene l'ormai famosa soluzione di Schwarzschild; le seconde per la loro

[1] Per la definizione proiettivo-differenziale delle V_2 di S_4 vedasi: G. Fubini, *Geometria proiettivo-differenziale delle superficie* (V_2) *di uno spazio* (S_4) *a quattro dimensioni*, Mathematische Annalen, Band 85, Seite 213.

[2] T. Levi-Civita, *ds^2 einsteiniani in campi newtoniani*, Note I-IX (questi Rendiconti, 1917-1919, vol. XXVI, XXVII e XXVIII).

[3] T. Levi-Civita, Nota V (vol. XXVII, pp. 240-248).

[4] T. Levi-Civita, Nota VIII (vol. XXVIII, pp. 3-13).