ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

ANNO CCCXX

1923

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXXII.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1923

soddisferà alla stessa equazione differenziale della $V_k\,[\xi]$. Sarà cioè soddisfatta la

$$(9)\qquad \sum_{r,s} A_{rs} X^{(i)}_{rs} + \sum_p B_p X^{(i)}_p + B X^{(i)} = 0 \quad (i=0\,,1\,,\dots\,,n\,;\; r\,,s=1\,,\dots\,,k).$$

Inoltre le due $V_k\,[x]$ e $[X]$ sono legate dalle (1). Ne segue per la (9):

$$\sum_{r,s} A_{rs}\, x^{(i)}_{rs} + \sum_p \left[2\sum_s A_{ps}\,\pi_s + B_p \right] x^{(i)}_p + \\ + \left[\sum_{r,s} A_{rs}\,\tau_{rs} + \sum_p m_p\, B_p + B \right] x^{(i)} = 0$$

che dimostra che anche la $V_k\,[x]$ è della specie Φ e che il suo cono caratteristico coincide con quello della $V_k\,[X]$. Cioè che tra le due $V_k\,[x]$ e $[\xi]$ i coni caratteristici sono formati da direzioni omologhe.

Possiamo quindi affermare che: *se due* V_k *di* S_n *sono proiettivamente applicabili del secondo ordine e una è della specie* Φ, *tale è anche l'altra*; e anzi: *condizione necessaria e sufficiente per la applicabilità è che — nella data corrispondenza biunivoca tra le due* V_k *— i coni caratteristici uscenti da punti omologhi siano generati da direzioni omologhe.*

5. Per le V_2 di S_4 basterà quindi la corrispondenza tra le *due* direzioni caratteristiche perchè se ne possa dedurre l'applicabilità. Cioè due V_2 di S_4 sono proiettivamente applicabili del secondo ordine se — in punti omologhi — le rispettive forme f_2 del prof. Fubini ([1]) differiscono solamente per un fattore, e viceversa.

Meccanica. — *Sopra i potenziali simmetrici che conducono alle soluzioni longitudinali delle equazioni gravitazionali di Einstein.* Nota di ATTILIO PALATINI, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Sono ben note le ampie classi di soluzioni delle equazioni gravitazionali di Einstein, trovate dal Levi-Civita ([2]), in corrispondenza a campi statici vuoti. Tra le dette soluzioni hanno speciale interesse le *soluzioni longitudinali* ([3]) e quelle *binarie di Weyl* ([4]): le prime perchè ad esse appartiene l'ormai famosa soluzione di Schwarzschild; le seconde per la loro

([1]) Per la definizione proiettivo-differenziale delle V_2 di S_4 vedasi: G. Fubini, *Geometria proiettivo-differenziale delle superficie* (V_2) *di uno spazio* (S_4) *a quattro dimensioni*, Mathematische Annalen, Band 85, Seite 213.

([2]) T. Levi-Civita, *ds^2 einsteiniani in campi newtoniani*. Note I-IX (questi Rendiconti, 1917-1919, vol. XXVI, XXVII e XXVIII).

([3]) T. Levi-Civita, Nota V (vol. XXVII, pp. 240-248).

([4]) T. Levi-Civita, Nota VIII (vol. XXVIII, pp. 3-13).

generalità potendo esser poste in corrispondenza biunivoca con gli ordinarî potenziali simmetrici. Queste ultime sono state denominate dal Levi-Civita stesso « soluzioni di Weyl » perchè dal Weyl erano già state trovate in precedenza, sebbene con metodi assolutamente diversi ([1])

Nella Nota or ora citata il Weyl mostra che tra le sue soluzioni si ritrova, come caso particolare, la soluzione di Schwarzschild, la quale viene a corrispondere al potenziale newtoniano di una massa distribuita sopra un segmento.

Più generalmente si può dimostrare che tutte le soluzioni longitudinali rientrano nelle soluzioni di Weyl e precisamente in corrispondenza ai potenziali newtoniani simmetrici di masse distribuite sopra un ellissoide rotondo allungato, sopra un iperboloide rotondo a due falde e lungo una retta indefinita. Il primo degli accennati potenziali (quando la massa è positiva) va associato alla soluzione di Schwarzschild. Il potenziale ordinario di un opportuno ellissoide viene dunque a corrispondere al campo einsteiniano di un'unica massa concentrata in un punto. È bene osservare esplicitamente che il nostro risultato non è in contraddizione con quello del Weyl, perchè segmento ed ellissoide rotondo allungato hanno notoriamente egual potenziale esterno.

Si può fare un'applicazione notevole del risultato ottenuto, considerando l'analogo einsteiniano del potenziale ordinario di due ellissoidi allungati di rotazione attorno al medesimo asse. Si riesce con relativa facilità a integrare le equazioni gravitazionali statiche corrispondenti e si ottiene con ciò l'alterazione metrica einsteiniana dovuta a due masse concentrate in due punti — naturalmente in una regione sufficientemente lontana dalle masse medesime ([2]).

In questa Nota mi limito ad esaminare per sommi capi il caso di uno e due ellissoidi, riservandomi di studiare la questione in ogni dettaglio in altro lavoro.

1. Fra le soluzioni longitudinali delle equazioni gravitazionali, la più interessante è quella contenuta nelle formule

$$(1)\quad \begin{cases} dl^2 = \dfrac{dR^2}{1-\alpha/R} + R^2(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\, d\varphi^2)\,; \quad (\alpha \text{ cost. positiva o negativa}), \\ \nu = \frac{1}{2}\log(1-\alpha/R)\ ;\ \omega_2 = \omega_3 = -\frac{1}{2}\omega_1 = -\alpha/2R^3\,, \end{cases}$$

perchè quando $\alpha > 0$, questa soluzione non è altro che quella di Schwarzschild corrispondente all'ipotesi di un'unica massa concentrata in un punto.

([1]) H. Weil, *Zur Gravitationstheorie* (Annalen der Physik, Bd. 54, Heft 18, 1917, pp. 117-145).

([2]) In vicinanza alle due masse, in particolare nella regione compresa entro le masse medesime, non valgono le formule da noi dedotte nel testo. Intorno al problema corrispondente mi consta che si sta occupando il prof. P. Straneo, il quale quanto prima comunicherà i risultati ai quali è pervenuto.

Nelle (1), ω_1, ω_2, ω_3 rappresentano le curvature principali del dl^2 e ν è il potenziale gravitazionale dal quale dipende la velocità V della luce a norma della formula $V = V_0 e^\nu$ (V_0 costante).

Si noti esplicitamente che ν dipende da un solo parametro e che due curvature sono eguali tra loro.

2. Il quadrato dell'elemento lineare di un campo einsteiniano associato a una soluzione di Weyl ha per espressione [1]

$$dl^2 = e^{-2\nu}\left[e^{2\lambda}(dr^2 + dz^2) + r^2 dx_3^2\right], \tag{2}$$

dove ν e λ sono soluzioni delle equazioni

$$\frac{\partial^2 \nu}{\partial z^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \nu}{\partial r}\right) = 0\,;\quad \frac{\partial \lambda}{\partial r} = r\left[\left(\frac{\partial \nu}{\partial r}\right)^2 - \left(\frac{\partial \nu}{\partial z}\right)^2\right],\quad \frac{\partial \lambda}{\partial z} = 2r\frac{\partial \nu}{\partial r}\frac{\partial \nu}{\partial z}. \tag{3}$$

Si tratta ora di vedere se tra le soluzioni delle (3) ve ne è una che conduca alle (1).

3. Proviamo a tal uopo ad esprimere che ν dipende da un solo parametro R e che due curvature della forma (2) sono eguali tra loro. Se si denota con α una costante e nell'ipotesi che sia $R^2 - \alpha R > 0$, si pone

$$r = \sqrt{R^2 - \alpha R}\,\sin\vartheta \quad ; \quad z = (\alpha/2 - R)\cos\vartheta\ , \quad x_3 = \varphi \tag{4}$$

e si eseguiscono le operazioni indicate, si trovano proprio le formule (1). Dunque la soluzione longitudinale presa in esame rientra come caso particolare tra le soluzioni di Weyl.

4. È interessante ora vedere a qual potenziale simmetrico ordinario essa va associata. A questo scopo si ponga ancora

$$R = \alpha/2 + \sqrt{C^2 + \tau} \quad ; \quad \alpha^2/4 = C^2 - A^2$$

(A e C costanti di cui $C > A$) e si elimini ϑ tra le (4). Si ottiene la famiglia di ellissoidi confocali

$$\frac{r^2}{A^2 + \tau} + \frac{z^2}{C^2 + \tau} = 1\,. \tag{5}$$

Con le stesse posizioni il potenziale ν prende la forma

$$\nu = \tfrac{1}{2}\log\frac{\sqrt{C^2 + \tau} - \alpha/2}{\sqrt{C^2 + \tau} + \alpha/2}\,. \tag{6}$$

Ciò premesso si ricordi [2] che nella teoria di relatività la funzione $-\frac{1}{2}V_0^2 e^{2\nu}$ costituisce il potenziale statico unitario di ogni campo di elemento lineare dl e che tale potenziale, in prima approssimazione, si può

(1) T. Levi-Civita, loc. cit., Nota VIII.
(2) T. Levi-Civita, loc. cit., Nota I.

assumere eguale a $-c^2\nu$ (c velocità della luce nello spazio euclideo). Per formule note ne segue che se nella (6) la costante α è tale per cui risulti [1] $\alpha = \frac{2fM}{c^2}$ (f costante di attrazione universale), $-c^2\nu$ rappresenta il potenziale ordinario di una massa M compresa tra due ellissoidi omotetici rotondi allungati infinitamente vicini. In tal caso la (5) è l'equazione dell'ellissoide confocale passante per il punto potenziato.

Dunque il campo einsteiniano di un'unica massa concentrata in un punto va associato all'ordinario potenziale newtoniano di un opportuno ellissoide rotondo allungato.

5. Prendiamo ora a considerare due ellissoidi rotondi allungati (l'asse di rotazione essendo il medesimo), le cui distanze focali siano

$$\alpha_1 = \frac{2fM_1}{c^2}\ , \quad \alpha_2 = \frac{2fM_2}{c^2}\,. \tag{7}$$

L'analogo einsteiniano sarà il campo statico delle due masse M_1 ed M_2. Vediamo di trovare l'espressione del dl^2 che gli compete. Basterà a tal uopo integrare le equazioni (3) assumendo per ν l'espressione

$$\nu = \tfrac{1}{2}\log \frac{\sqrt{C_1^2+\tau_1} - \alpha_1/2}{\sqrt{C_1^2+\tau_1} + \alpha_1/2} \cdot \frac{\sqrt{C_2^2+\tau_2} - \alpha_2/2}{\sqrt{C_2^2+\tau_2} + \alpha_2/2}\,, \tag{8}$$

dove τ_1 e τ_2 sono le soluzioni delle due equazioni

$$\frac{r^2}{A_1^2+\tau_1} + \frac{(z-a)^2}{C_1^2+\tau_1} = 1 \quad ; \quad \frac{r^2}{A_2^2+\tau_2} + \frac{(z+a)^2}{C_2^2+\tau_2} = 1\,,$$

per le quali le equazioni stesse rappresentano ellissoidi. $2a$ rappresenta evidentemente la distanza fra i centri dei due ellissoidi.

Integrando le (3) si ottiene per λ l'espressione

$$e^{-2\lambda} = \Phi \cdot \Psi \cdot X\,, \tag{9}$$

dove

$$\Phi = (C_1^2+\tau_1)\left[\frac{r^2}{(A_1^2+\tau_1)^2} + \frac{(z-a)^2}{(C_1^2+\tau_1)^2}\right];$$

$$\Psi = (C_2^2+\tau_2)\left[\frac{r^2}{(A_1^2+\tau_2)^2} + \frac{(z+a)^2}{(C_2^2+\tau_2)^2}\right];$$

$$X = \frac{1}{b}\left[\frac{(C_1^2+\tau_1)(C_2^2+\tau_2)}{(A_1^2+\tau_1)(A_2^2+\tau_2)}\left\{\frac{\alpha_1 r}{\sqrt{C_1^2+\tau_1}} + \frac{\alpha_2 r}{\sqrt{C_2^2+\tau_2}}\right\}^2 + \right.$$
$$\left. + \left\{\frac{\alpha_1(z-a)}{\sqrt{C_1^2+\tau_1}} + \frac{\alpha_2(z+a)}{\sqrt{C_2^2+\tau_2}}\right\}^2 - 16a^2\right]^2.$$

[1] Se α è positivo, questa è la notissima relazione che corre tra la costante α e la massa M, nel campo einsteiniano di un'unica massa concentrata in un punto.

b è una costante alla quale si può e conviene attribuire il valore

$$b = [(\alpha_1 + \alpha_2)^2 - 16\,a^2]^2 .$$

L'espressione del dl^2 è fornita dalla (2) dove per ν e λ si intendono sostituiti i loro valori (8) e (9). Per il ds^2 quadridimensionale di Einstein si ha

$$ds^2 = V^2 dt^2 - dl^2 ,$$

dove, come già si è detto, $V = V_0 e^\nu$. Se si esige che l'influenza delle due masse si vada attenuando all'∞, alla costante V_0 bisogna attribuire il valore c.

6. Se si vogliono le espressioni dei coefficienti del ds^2 in 2ª approssimazione, si ponga

$$R_1 = \frac{\alpha_1}{2} + \sqrt{C_1^2 + \tau_1} \quad ; \quad R_1 = \frac{\alpha_2}{2} + \sqrt{C_2^2 + \tau_2}$$

e si considerino $\frac{\alpha_1}{R_1}, \frac{\alpha_2}{R_2}, \frac{\alpha_1}{a}, \frac{\alpha_2}{a}$ come quantità di primo ordine [1]. Si trova

$$V^2 = c^2 \left(1 - \frac{\alpha_1}{R_1} - \frac{\alpha_2}{R_2} + \frac{\alpha_1 \alpha_2}{R_1 R_2}\right)$$

$$e^{2\lambda} = 1 - \frac{\alpha_1^2}{4R_1^2} \sin^2 \vartheta_1 - \frac{\alpha_2^2}{4R_2^2} \sin^2 \vartheta_2 - \frac{\alpha_1 \alpha_2}{2a^2} \sin^2 \frac{\vartheta_1 - \vartheta_2}{2} .$$

Se poi si trascurano anche le quantità di secondo ordine, si ha $e^{2\lambda} = 1$ e $V^2 = c^2(1 + 2\nu)$ e quindi

$$ds^2 = c^2(1 + 2\nu)\, dt^2 - (1 - 2\nu)\, dl_0^2 , \tag{10}$$

con dl_0^2 euclideo. Si verifica dunque, come naturalmente doveva avvenire, un teorema generale dovuto al Levi Civita, secondo il quale ogni ds^2 einsteiniano statico si presenta, in prima approssimazione, sotto la forma (10) [2].

[1] Le ragioni che inducono a trattar come molto piccole tali quantità, si deducono dall'esame del caso di un'unica massa. I parametri ϑ_1 e ϑ_2 che compariscono nelle formule seguenti sono le anomalie eccentriche del punto potenziato rispetto ai due ellissoidi potenzianti.

[2] T. Levi-Civita, loc. cit., Nota I.