ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE
DEI LINCEI

ANNO CCCXX

1923

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXXII.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1923

Fisica matematica. — *L'integrazione dell'equazione di Laplace in un cerchio, essendo data al contorno una relazione lineare tra la funzione e la sua derivata obliqua.* Nota di ENRICO PERSICO e BIANCA DI RENZO, presentata dal Socio VOLTERRA.

In alcune questioni di Fisica matematica (ad esempio, nello studio della propagazione del calore in una lamina immersa in un campo magnetico) si presenta il seguente problema:

determinare una funzione $u(x, y)$, armonica e regolare nell'interno di un cerchio, essendo data, al contorno, una relazione lineare fra la u e la sua derivata secondo una direzione l inclinata di un angolo costante β rispetto alla normale, o, più precisamente, una relazione del tipo

$$u - \lambda \frac{\partial u}{\partial l} = \varphi_0 \tag{1}$$

essendo λ una costante e φ_0 una funzione nota dei punti del contorno.

Se tale funzione esiste, essa, nell'ipotesi di $\lambda > 0$, è unica; infatti, se esistessero due soluzioni u_1 ed u_2, si potrebbe facilmente riconoscere, applicando la formula di Green, che la funzione armonica $v = u_1 - u_2$ è nulla in tutta l'area e quindi $u_1 = u_2$.

Passiamo quindi a dimostrare l'esistenza effettiva della soluzione ed a trovarne la espressione.

Preso dunque un cerchio, supposto per semplicità di raggio unitario, sia n la normale volta verso l'interno.

La funzione u che si tratta di determinare soddisfa nell'interno del cerchio all'equazione

$$\Delta^2 u = 0$$

cioè, in coordinate polari,

$$r \frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} = 0$$

ed al contorno alla relazione (1).

Chiamiamo φ la funzione armonica che sia al contorno uguale a φ_0; avremo allora

$$u - \lambda r \frac{\partial u}{\partial l} = 0, \tag{2}$$

poichè tale funzione soddisfa alle due condizioni imposte per la φ.

Ponendo ora

$$\varrho = \log r$$

la condizione di armonicità per la funzione u si esprime con

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \varrho^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} = 0 \tag{3}$$

e la (2) si trasforma nella

$$u + \lambda \frac{\partial u}{\partial \varrho} \cos \beta - \lambda \frac{\partial u}{\partial \alpha} \operatorname{sen} \beta = \varphi . \tag{4}$$

Deriviamo ora la (4) rispetto ad α e moltiplichiamola per $-\lambda \operatorname{sen} \beta$; deriviamo quindi la (4) rispetto a ϱ e moltiplichiamola per $-\lambda \cos \beta$; sostituendo poi per la (3) $\frac{\partial^2 u}{\partial \varrho^2}$ con $-\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2}$ e sommando le due relazioni così ottenute con la (4) si ha

$$u - 2\lambda \operatorname{sen} \beta \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \lambda^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} = \Phi \tag{5}$$

dove si è posto

$$\Phi = \varphi + \lambda r \frac{\partial \varphi}{\partial l'}$$

e si è indicata con l' la direzione simmetrica di l rispetto alla normale.

L'integrazione di questa equazione si effettua facilmente, considerando α come unica variabile indipendente; l'integrale generale è

$$u = C_1 e^{a_1 \alpha} + C_2 e^{a_2 \alpha} \tag{6}$$

dove

$$a_1 = \frac{i}{\lambda} e^{-i\beta} \quad ; \quad a_2 = -\frac{i}{\lambda} e^{i\beta}$$

$$C_1 = \frac{1}{\lambda^2 (a_1 - a_2)} \int_0^\alpha \Phi e^{-a_1 \sigma} \partial \sigma + K_1 ;$$

$$C_2 = -\frac{1}{\lambda^2 (a_1 - a_2)} \int_0^\alpha \Phi e^{-a_2 \sigma} \partial \sigma + K_2$$

e dove K_1 e K_2 sono due funzioni arbitrarie della sola ϱ.

Ora la (5) è una conseguenza necessaria delle (3) e (4), ma non è vero l'inverso; dovremo quindi imporre alla u le ulteriori condizioni:

(I) che al contorno soddisfi la (4);

(II) che sia armonica;

(III) che sia periodica rispetto ad α col periodo 2π.

Cominciamo dall'imporre alla u la condizione (III); cioè determiniamo, se possibile, K_1 e K_2 in modo che la u soddisfi la condizione di periodicità.

Indichiamo con $\bar{u}$ il valore della u per $\alpha + 2\pi$; la condizione (III) si esprimerà allora così:

$$\text{quindi anche}\quad \left\{\begin{array}{ll} \bar{u} - u = 0 & \text{per qualunque } \alpha \\ \bar{u}' - u' = 0 & \end{array}\right.$$

Posto

$$\frac{1}{\lambda^2(a_1 - a_2)}\int_\alpha^{\alpha+2\pi} \Phi\, e^{-a_1\sigma}\, \partial\sigma = \mathrm{I}_1 \quad ; \quad -\frac{1}{\lambda^2(a_1 - a_2)}\int_\alpha^{\alpha+2\pi} \Phi\, e^{-a_2\sigma}\, \partial\sigma = \mathrm{I}_2$$

sarà

$$(7)\ \bar{u} - u = \left[(\mathrm{C}_1 + \mathrm{I}_1)\, e^{a_1 2\pi} - \mathrm{C}_1\right] e^{a_1\alpha} + \left[(\mathrm{C}_2 + \mathrm{I}_2)\, e^{a_2 2\pi} - \mathrm{C}_2\right] e^{a_2\alpha} = 0$$

$$(8)\ \bar{u}' - u' = a_1\left[(\mathrm{C}_1 + \mathrm{I}_1)\, e^{a_1 2\pi} - \mathrm{C}_1\right] e^{a_1\alpha} + \\ + a_2\left[(\mathrm{C}_2 + \mathrm{I}_2)\, e^{a_2 2\pi} - \mathrm{C}_2\right] e^{a_2\alpha} = 0\,.$$

Dalle (7) e (8) si trae (supponendo $a_2 \neq a_1$)

$$\mathrm{C}_1 = \frac{e^{2\pi a_1}}{1 - e^{2\pi a_1}}\,\mathrm{I}_1 \qquad\qquad \mathrm{C}_2 = \frac{e^{2\pi a_2}}{1 - e^{2\pi a_2}}\,\mathrm{I}_2$$

e quindi per le (6)

$$u = \frac{e^{2\pi a_1}}{1 - e^{2\pi a_1}}\,\mathrm{I}_1\, e^{a_1\alpha} + \frac{e^{2\pi a_2}}{1 - e^{2\pi a_2}}\,\mathrm{I}_2\, e^{a_2\alpha}\,.$$

Ora è facile verificare che il secondo termine è coniugato del primo; potremo quindi scrivere più brevemente:

$$u = \text{p. r.}\ \frac{2e^{2\pi a_1}}{1 - e^{2\pi a_1}}\,\mathrm{I}_1\, e^{a_1\alpha}\,,$$

dove col simbolo p. r. si vuol denotare che del secondo membro si considera la sola *parte reale*.

Prima di sostituire per I_1 la sua espressione si osservi che

$$\int_\alpha^{\alpha+2\pi} \Phi\, e^{-a_1\sigma}\, \partial\sigma = -\lambda \operatorname{sen}\beta\, \varphi\, e^{-a_1(\alpha+2\pi)}\left(1 - e^{2\pi a_1}\right) + \\ + \cos\beta \int_\alpha^{\alpha+2\pi}\left(\varphi e^{-i\beta} - \lambda\frac{\partial\varphi}{\partial\varrho}\right) e^{-a_1\sigma}\, \partial\sigma\,;$$

sostituendo questo valore per l'integrale e semplificando, si ottiene infine, (trascurando un termine imaginario):

$$(9)\qquad u = \text{p. r.}\ \frac{e^{a_1(\alpha+2\pi)}}{1 - e^{2\pi a_1}}\,\frac{1}{i\lambda}\int_\alpha^{\alpha+2\pi}\left(\varphi\, e^{-i\beta} - \lambda\frac{\partial\varphi}{\partial\varrho}\right) e^{-a_1\sigma}\, \partial\sigma\,.$$

Così la sola condizione di periodicità ha determinato tutti gli elementi che restavano in nostro arbitrio; non resta che da verificare se la u, fornita dalla (9), soddisfa le condizioni (I) e (II), cioè se risolve effettivamente il nostro problema.

Per verificare che l'espressione (9) della u così ottenuta soddisfa la relazione (4), calcoliamo le derivate della (9) rispetto ad α e a ϱ; avremo:

$$(10)\qquad \frac{\partial u}{\partial \alpha} = \text{p.r.}\ \frac{a_1\, e^{a_1(\alpha+2\pi)}}{1-e^{2\pi a_1}}\,\frac{1}{\lambda i}\int_\alpha^{\alpha+2\pi}\left(\varphi\, e^{-i\beta} - \lambda\frac{\partial \varphi}{\partial \varrho}\right) e^{-a_1\sigma}\,\partial\sigma + \\ + \frac{1}{\lambda i}\left(\varphi\, e^{-i\beta} - \lambda\frac{\partial\varphi}{\partial\varrho}\right)$$

$$(11)\qquad \frac{\partial u}{\partial \varrho} = \text{p.r.}\ \frac{e^{a_1(\alpha+2\pi)}}{1-e^{2\pi a_1}}\,\frac{1}{\lambda i}\left\{\int_\alpha^{\alpha+2\pi}\frac{\partial\varphi}{\partial\varrho}\, e^{-i\beta}\, e^{-a_1\sigma}\,\partial\sigma + \right.\\ \left. + \lambda a_1^2\int_\alpha^{\alpha+2\pi}\varphi\, e^{-a_1\sigma}\,\partial\sigma\right\} + \frac{1}{i}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha} + a_1\varphi\right)$$

quindi:

$$\lambda\frac{\partial u}{\partial\alpha}\operatorname{sen}\beta = \text{p.r.}\ \frac{e^{a_1(\alpha+2\pi)}}{1-e^{2\pi a_1}}\,\frac{\cos\beta\operatorname{sen}\beta}{\lambda}\int_\alpha^{\alpha+2\pi}\left(\varphi\, e^{-i\beta} - \lambda\frac{\partial\varphi}{\partial\varrho}\right) e^{-a_1\sigma}\,\partial\sigma + \\ + \frac{e^{a_1(\alpha+2\pi)}}{1-e^{2\pi a_1}}\,\frac{\operatorname{sen}^2\beta}{\lambda i}\int_\alpha^{\alpha+2\pi}\left(\varphi\, e^{-i\beta} - \lambda\frac{\partial\varphi}{\partial\varrho}\right) e^{-a_1\sigma}\,\partial\sigma - \\ - \operatorname{sen}^2\beta\,\varphi - i\operatorname{sen}\beta\cos\beta\,\varphi + i\lambda\operatorname{sen}\beta\frac{\partial\varphi}{\partial\varrho}$$

dove i due ultimi termini si possono trascurare perchè immaginarî.

$$\lambda\frac{\partial u}{\partial\varrho}\cos\beta = \text{p.r.}\ \frac{e^{a_1(\alpha+2\pi)}}{1-e^{2\pi a_1}}\left\{-\frac{\cos^2\beta}{\lambda i}\int_\alpha^{\alpha+2\pi}\left(\varphi\, e^{-i\beta} - \lambda\frac{\partial\varphi}{\partial\varrho}\right) e^{-a_1\sigma}\,\partial\sigma + \right.\\ \left. + \frac{\operatorname{sen}\beta\cos\beta}{\lambda}\int_\alpha^{\alpha+2\pi}\left(\varphi\, e^{-i\beta} - \lambda\frac{\partial\varphi}{\partial\varrho}\right) e^{-a_1\sigma}\,\partial\sigma\right\} + \\ + \cos^2\beta\,\varphi + \frac{\lambda\cos\beta}{i}\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha} - i\operatorname{sen}\beta\cos\beta\,\varphi$$

dove i due ultimi termini (immaginarî) si possono trascurare.

Si ha dunque:

$$\lambda\frac{\partial u}{\partial\alpha}\operatorname{sen}\beta - \lambda\frac{\partial u}{\partial\varrho}\cos\beta = \\ = \text{p.r.}\ \frac{e^{a_1(\alpha+2\pi)}}{1-e^{2\pi a_1}}\,\frac{1}{\lambda i}\int_\alpha^{\alpha+2\pi}\left(\varphi\, e^{-i\beta} - \lambda\frac{\partial\varphi}{\partial\varrho}\right) e^{-a_1\sigma}\,\partial\sigma - \varphi$$

e confrontando con la (9) si vede che resta verificata la relazione:

$$u + \lambda\frac{\partial u}{\partial\varrho}\cos\beta - \lambda\frac{\partial u}{\partial\alpha}\operatorname{sen}\beta = \varphi\,.$$

Per verificare ora che la u data dalla (9) è armonica, si ha, derivando ancora le (10) (11) rispettivamente rispetto ad α e a ϱ:

$$(12)\quad \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} = \text{p r.}\, \frac{\alpha_1^2 e^{a_1(\alpha+2\pi)}}{1-e^{2\pi a_1}} \frac{1}{\lambda i} \int_\alpha^{\alpha+2\pi} \left(\varphi e^{-i\beta} - \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial \varrho}\right) e^{-a_1\sigma}\, \partial\sigma + \\ + \frac{a_1}{\lambda i} \left\{ \left(\varphi e^{-i\beta} - \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial \varrho}\right) \right\} + \frac{1}{\lambda i} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} e^{-i\beta} - \lambda \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \varrho\, \partial \alpha} \right)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \varrho^2} = \text{p. r.} - a_1^2 \frac{e^{a_1(\alpha+2\pi)}}{1-e^{2\pi a_1}} \frac{1}{\lambda i} \int_\alpha^{\alpha+2\pi} \left(\varphi e^{-i\beta} - \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial \varrho}\right) e^{-a_1\sigma}\, \partial\sigma - \\ - \frac{a_1}{\lambda i} \left(\varphi e^{-i\beta} - \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial \varrho}\right) - \frac{1}{\lambda i} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} e^{-i\beta} - \lambda \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \varrho\, \partial \alpha} \right).$$

Confrontando questa espressione con la (12) si vede che resta verificata la (3). Dunque la (9) è la formula risolutiva del nostro problema.

Se nella (9) si fa tendere λ verso zero (premettendo al passaggio al limite alcune ovvie trasformazioni e cambiando la variabile di integrazione mediante la sostituzione $\sigma - \alpha = \lambda \xi$) si trova, come era da prevedersi, $u = \varphi$: si ricade infatti nel classico problema di Dirichlet.

Fisica. — *Sulla dispersione rotatoria di soluzioni fluorescenti* [1]. Nota del dott. A. Carrelli, presentata dal Socio M. Cantone.

In corrispondenza all'ipotesi per cui si spiega dalle moderne teorie la rotazione del piano di polarizzazione della luce nelle sostanze otticamente attive come dipendente dalla simultanea propagazione di due vibrazioni circolari inverse, per i mezzi assorbenti si ammette la presenza nella molecola di centri di risuonanza distinti per onde polarizzate circolarmente in sensi opposti. Il Cotton [2] sperimentando su soluzioni di tartrati di cromo e di rame ha potuto dimostrare per primo questo dicroismo circolare, che nel caso da lui studiato si manifestava per radiazioni dello spettro visibile. Egli infatti determinò i coefficienti di assorbimento per $\lambda = 5893$ delle onde con polarizzazione circolare opposta, trovandoli diversi, e in conseguenza di ciò potè dimostrare che un fascio di luce naturale propagantesi in tali soluzioni dicroiche all'uscita dalla soluzione presenta una parziale polarizzazione ellittica [3].

Si consideri ora una soluzione di una sostanza che sia otticamente attiva e nello stesso tempo fluorescente. In molecole di tale sostanza i centri di

[1] Lavoro eseguito nell'Istituto fisico della R. Università di Napoli.

[2] Cotton, C. R., 120, pp. 989, 1044.

[3] Le esperienze di Cotton sono state continuate da altri e ultimamente da Bruhat (Ann. de Phys., Mars-Mai, 1915) in maniera molto particolareggiata ed interessante.