ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE

DEI LINCEI

ANNO CCCXX

1923

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXXII.

1° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1923

2°) *tous les coefficients* $a_N = |a_N|\, e^{i\varphi_N}$ *remplissent la condition*

$$\cos(\varphi_{n_q} - \varphi_N) \geqq 0,$$

la fonction $f(z)$ *a une singularité au point* $z = 1$.

Sous les conditions de l'énoncé, on a

$$\text{partie réelle de } \frac{a_N}{a_{m_q}} \geqq 0$$

et donc

$$|A_{N_q}| \geqq |a_{n_q}| \left(\frac{3}{4}\right)^{N_q - n_q} \binom{n_q}{N_q - n_q}.$$

Si l'on tient présent que $N_q > n_q > \frac{N_q}{2}$ et que a_{n_q} est distingué, on voit, d'après (4) et (5), que

$$\overline{\lim_{q \to \infty}}\, |A_{N_q}|^{\frac{1}{N_q}} \geqq \frac{3}{2}.$$

Puisque, d'après la seconde partie du théorème I, on ne peut avoir le signe $>$, le théorème en vue est démontré. Il généralise le théorème de M. Vivanti. Si l'on veut examiner le point $z = e^{i\psi}$, on n'a évidemment qu'à écrire dans l'énoncé

$$\cos\left[\varphi_N - \varphi_{n_q} + (n_q - N)\psi\right] \geqq 0. \tag{6}$$

D'autres théorèmes seront donnés dans une autre Note.

Matematica. — *Nuove rappresentazioni intrinseche della curvatura gaussiana di una superficie.* Nota di UMBERTO CRUDELI, presentata dal Socio G. CASTELNUOVO.

Giova osservare subito come una rappresentazione di carattere intrinseco [1] e di significato notabile (non però quanto quello della rappresentazione cui mira la presente Nota) della curvatura gaussiana di una superficie potrebbe ottenersi facilmente, sfruttando con opportuno intento la nota formula $K = -\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial u^2}$, alla quale si perviene [2], con manifesto signi-

[1] Per una visione di alcune rappresentazioni intrinseche della curvatura gaussiana di una superficie vedasi Severi: *Sulla curvatura delle superficie e varietà* (Rend. del Circolo matematico di Palermo, 1917, tomo XLII, pag. 227). Vedasi anche Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen, Bd. III$_3$, Heft 1, pag. 98.

[2] Vedasi, ad esempio, Bianchi: *Lezioni di geometria differenziale.*

ficato dei simboli, quando sulla superficie si assumano, come linee coordinate, un sistema di geodetiche e le loro traiettorie ortogonali e, in pari tempo, si scelga u in modo da ridurre il quadrato dell'elemento lineare alla forma $ds^2 = du^2 + G\,dv^2$. Ecco anzi come (non essendo la breve ricerca priva d'interesse):

Se fissiamo un punto P incontro di una certa linea u (traiettoria che verrà chiamata l) con una certa v (diciamola geodetica γ) ed intendiamo che la coordinata v di un generico punto della superficie sia l'arco della predetta traiettoria fissa, avremo $G = 1$ in corrispondenza ad ogni punto di cotesta traiettoria (quindi anche nel punto P). D'altra parte, in corrispondenza ad ogni punto incontro di una linea $u = \text{cost.}$ con una linea $v = \text{cost.}$, si ha $ds_u = \sqrt{G}\,dv$ come elemento d'arco di cotesta linea u; sicchè $\sqrt{G} = \frac{ds_u}{dv}$. Ora, considerando i rapporti $\frac{ds_u}{dv}$, $\frac{ds_u - dv}{dv}$ lungo la geodetica γ, avremo che i rapporti stessi saranno ivi funzioni dell'arco di geodetica in discorso (arco che può identificarsi col parametro u). La prima di coteste funzioni verrà chiamata *modulo algebrico di riduzione* (l'altra, invece, *coefficiente algebrico di distensione*) dell'elemento lineare uscente da P ed appartenente alla traiettoria l, nel nostro passaggio sulla superficie, lungo γ, dalla l ad un'altra traiettoria segante ortogonalmente la considerata famiglia di geodetiche (cui appartiene γ). Di conseguenza, se, per miglior distinzione, si denota con σ l'arco di geodetica γ e se, in pari tempo, viene designata con $\varepsilon(\sigma)$ una (l'una oppure l'altra) di quelle funzioni, potremo esprimere la curvatura gaussiana della superficie nel punto P (diciamola K_P) mediante

$$K_P = -\left(\frac{d^2\varepsilon(\sigma)}{d\sigma^2}\right)_P.$$

Poi, ricordando una nota espressione, la quale serve a rappresentare la derivata seconda di una funzione, e risguardando il punto P come origine degli archi σ, si ha

$$K_P = -\lim_{\sigma \to 0} \frac{\varepsilon(\sigma) + \varepsilon(-\sigma) - 2\varepsilon(0)}{\sigma^2};$$

per cui potremo scrivere $K_P = -\frac{\varepsilon(\sigma) + \varepsilon(-\sigma) - 2\varepsilon(0)}{\sigma^2} +$ quantità che diventa infinitesima d'ordine *non inferiore al secondo* (rispetto a σ) col tendere di σ a zero.

Non si ometta di osservare come $\varepsilon(0) = 1$ oppure $\varepsilon(0) = 0$, a seconda che ε rappresenta il modulo algebrico di riduzione oppure il coefficiente algebrico di distensione superiormente introdotti; come pure si osservi che la conoscenza di valori della $\varepsilon(\sigma)$ presuppone (come abbiamo veduto) il tracciamento di traiettorie *ortogonali ad una famiglia* di geodetiche.

* * *

Una più espressiva forma di carattere intrinseco della curvatura gaussiana di una superficie può ottenersi nel modo che tosto vedremo.

Premetto la ricerca dell'aspetto che può darsi alla suddetta curvatura assumendo come sistema coordinato sulla superficie (od almeno sopra una porzione della superficie stessa) un doppio sistema di geodetiche. Si scriva, intanto, $ds^2 = e\,du^2 + 2f\,du\,dv + g\,dv^2$ scegliendo come sistema coordinato, un doppio sistema di geodetiche. La equazione di Gauss per le geodetiche

$$\sqrt{eg-f^2}\, d\theta = \frac{1}{2}\frac{f}{e}\left(\frac{\partial e}{\partial u}du + \frac{\partial e}{\partial v}dv\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial e}{\partial v}du - \frac{\partial f}{\partial u}du - \frac{1}{2}\frac{\partial g}{\partial u}dv \text{ (1)},$$

sfruttata per una nostra linea $u = \text{cost.}$, porge

$$(1) \qquad 2\sqrt{eg-f^2}\,\frac{\partial \Omega}{\partial v} = \frac{f}{e}\frac{\partial e}{\partial v} - \frac{\partial g}{\partial u},$$

intendendo che, almeno in una regione superficiale (su cui rimanere per riguardo a cotesto sfruttamento), l'angolo (fra 0 e π) formato dai versi positivi delle linee coordinate (angolo che ho denotato con Ω) eguagli quello di cui deve rotare nel senso positivo, sul piano tangente, la direzione positiva della tangente alla linea $v = \text{cost.}$ per sovrapporsi a quella della tangente alla linea $u = \text{cost.}$ D'altra parte, essendo (per ipotesi) geodetiche anche le nostre $v = \text{cost.}$, si ha

$$\frac{f}{e}\frac{\partial e}{\partial v} = 2\frac{f}{e}\frac{\partial f}{\partial u} - \left(\frac{f}{e}\right)^2\frac{\partial e}{\partial u};$$

per cui la (1) diventa

$$2\sqrt{eg-f^2}\,\frac{\partial \Omega}{\partial v} = -\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{eg-f^2}{e}\right),$$

ovvero

$$\sqrt{e}\,\frac{\partial \Omega}{\partial v} = -\frac{\partial \sqrt{\dfrac{eg-f^2}{e}}}{\partial u};$$

ma

$$\sqrt{\frac{eg-f^2}{e}} = \sqrt{g}\,\operatorname{sen}\Omega,$$

sicchè

$$\frac{\partial \Omega}{\partial v} = -\frac{1}{\sqrt{e}}\frac{\partial}{\partial u}\left(\sqrt{g}\,\operatorname{sen}\Omega\right).$$

Mediante derivazione rispetto ad u, viene

$$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial u\,\partial v} = -\frac{\partial}{\partial u}\left\{\frac{1}{\sqrt{e}}\frac{\partial}{\partial u}\left(\sqrt{g}\,\operatorname{sen}\Omega\right)\right\}.$$

Ora, si osservi che la nota formula del Liouville

$$K\sqrt{eg-f^2} = \frac{\partial^2 \Omega}{\partial u\,\partial v} + \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\sqrt{g}}{\varrho_u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\sqrt{e}}{\varrho_v}\right)$$

porge nel nostro caso

$$K\sqrt{eg-f^2} = \frac{\partial^2 \Omega}{\partial u\,\partial v},$$

(1) La lettera θ rappresenta, com'è noto (vedasi Bianchi, *Lezioni di geometria differenziale*), l'angolo di cui deve rotare nel noto senso (senso positivo) sul piano tangente la direzione positiva della tangente alla linea $v = \text{cost.}$ per sovrapporsi a quella della tangente alla geodetica. Le radici che figurano nel testo sono radici aritmetiche.

poichè le curvature geodetiche delle linee coordinate, cioè $\frac{1}{\varrho_u}$ ed $\frac{1}{\varrho_v}$, sono nel nostro caso nulle, per avere scelto come sistema coordinato sulla superficie un doppio sistema di geodetiche. Noi, dunque, come espressione della curvatura gaussiana della superficie in un generico punto appartenente alla considerata regione, avremo

$$K = -\frac{1}{\sqrt{eg - f^2}} \frac{\partial}{\partial u}\left\{\frac{1}{\sqrt{e}} \frac{\partial}{\partial u}\left(\sqrt{g}\,\mathrm{sen}\,\Omega\right)\right\}.$$

Ciò premesso, si scelga della superficie una geodetica uscente dal punto P della superficie stessa (geodetica che verrà chiamata con γ e che potremo supporre essere la linea $v = \text{cost.}$ condotta per P): poi si considerino le geodetiche della superficie uscenti dai punti della γ ortogonalmente alla γ medesima. Intenderemo ora che le $u = \text{cost.}$ siano coteste geodetiche ortogonali alla γ, della quale l'arco (diciamolo σ) verrà assunto come parametro u mentre come parametro v assumeremo l'arco della geodetica (questa geodetica della superficie verrà denotata con λ) uscente da P ortogonalmente alla γ. In conseguenza, osservando che, presentemente, lungo γ si ha $\Omega = \frac{\pi}{2}$, $f = 0$ ed $e = 1$, senza omettere anche di osservare che ora $g = 1$ nel punto P (poichè ora $g = 1$ lungo la predetta geodetica uscente da P ortogonalmente alla γ), potremo scrivere

$$K_P = -\left(\frac{\partial^2 \sqrt{g}}{\partial \sigma^2}\right)_P$$

come espressione della curvatura gaussiana della superficie nel punto P.

Si venga poi, anche qui, alla considerazione dei rapporti

$$\frac{ds_u}{dv}\ ,\quad \frac{ds_u - dv}{dv}$$

lungo la geodetica γ (rapporti che ivi sono funzioni dell'arco σ). La prima di coteste funzioni verrà chiamata *modulo algebrico di riduzione* (l'altra, invece, *coefficiente algebrico di distensione*) dell'elemento lineare uscente da P ed appartenente alla geodetica λ, nel nostro passaggio, sulla superficie, lungo γ, dalla λ ad un'altra geodetica segante ortogonalmente la geodetica γ; una (l'una oppure l'altra) di quelle funzioni dell'arco σ verrà rappresentata mediante $\tau(\sigma)$. Pertanto

$$K_P = -\left(\frac{d^2 \tau(\sigma)}{d\sigma^2}\right)_P,$$

la quale (se risguardiamo P come origine degli archi σ) può anche scriversi:

$K_P = -\frac{\tau(\sigma) + \tau(-\sigma) - 2\tau(0)}{\sigma^2}$ + quantità che diventa infinitesima d'ordine *non inferiore al secondo* (rispetto a σ) col tendere di σ a zero. Non si ometta di osservare come $\tau(0) = 1$ oppure $\tau(0) = 0$, a seconda che τ rappresenta il modulo algebrico di riduzione, oppure il coefficiente algebrico di distensione ora introdotti.

Giova poi notare che, nel suddetto passaggio, sulla superficie, lungo la geodetica γ, dalla λ ad un'altra geodetica segante ortogonalmente la γ, la direzione del considerato elemento di geodetica λ viene a subire un trasporto per parallelismo [per parallelismo secondo il significato di Levi-Civita [1]]. Ora, noi diremo che un elemento (*elemento iniziale*) di geodetica della superficie subisce, sulla superficie stessa, un *cambiamento per similitudine nel trasporto infinitesimale lungo un'assegnata geodetica* (geodetica γ), quando, assunto un doppio sistema di geodetiche della superficie, del quale una famiglia contenga la γ mentre l'altra sia costituita dalle geodetiche uscenti dai punti della γ medesima sotto un prefissato angolo (coincidente con quello compreso fra γ ed il predetto elemento iniziale) e denotato con PP′ cotesto elemento (infinitesimo) iniziale spiccato dal punto P della γ ed avente l'estremo P′ sulla γ' (rappresentando con γ' la geodetica uscente da P′ ed appartenente alla famiglia cui appartiene la γ), dalla considerazione di PP′ noi passiamo, senza però uscire da un intorno infinitesimo di P (intorno di cui designeremo con M un generico punto situato sulla γ), alla considerazione dell'elemento MM′ di geodetica della superficie, il quale, supposto spiccato da M, ha direzione parallela (secondo il significato di Levi-Civita) a quella del suddetto elemento iniziale ed ha l'estremo M′ sulla geodetica γ' [2]. Ciò premesso (seguitando a denotare con P un punto della superficie e con γ una geodetica, ivi uscente, della superficie stessa), potremo raccogliere la seguente rappresentazione intrinseca:

La curvatura gaussiana della superficie nel punto P eguaglia, cambiata di segno, la derivata seconda, nel punto in discorso, presa rispetto all'arco della geodetica γ, del modulo algebrico di riduzione come pure del coefficiente algebrico di distensione che si presentano in corrispondenza al cambiamento per similitudine nel trasporto infinitesimale lungo γ dell'elemento di geodetica spiccato da P ortogonalmente alla γ medesima.

(1) Levi-Civita, *Nozione di parallelismo in una varietà qualunque, e conseguente specificazione geometrica della curvatura riemanniana* (Rend. del Circolo matematico di Palermo, 1917, tomo XLII, pag. 173). Vedasi pure, dello stesso autore, nelle Publications de l'Institut de Ciències de Barcelona, *Qüestions de mecànica clàssica i relativista* (conferèncias donades el gener de 1921).

(2) La nozione di cambiamento per similitudine (da me ora introdotta) può subito giustificarsi pensando al caso in cui la considerata superficie sia sviluppabile, in particolare piana, sulla quale allora la predetta similitudine diventa una similitudine *ordinaria* (eventualmente degenere in una equipollenza).