ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE

DEI LINCEI

ANNO CCCXX

1923

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXXII.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1923

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 15 aprile 1923.

V. VOLTERRA, Vicepresidente.

MEMORIE E NOTE DI SOCI

Geometria. — *Relazioni tra le due falde focali di una congruenza W. Composizione di 2 trasformazioni W.* Nota del Corrispondente GUIDO FUBINI.

1 Conservando le notazioni di una Nota precedente [1] ci proponiamo di determinare gli elementi della seconda falda focale, che indicheremo con H_1, β_1, γ_1 ecc.

Dalle (16) si trae:

$$(17)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 x_1}{\partial u^2} - \dfrac{H_u}{H}\dfrac{\partial x_1}{\partial u} + \beta\dfrac{\partial x_1}{\partial v} - Px_1 = Sx \\ \dfrac{\partial^2 x_1}{\partial v^2} - \dfrac{H_v}{H}\dfrac{\partial x_1}{\partial v} + \gamma\dfrac{\partial x_1}{\partial u} - Qx_1 = Tx \end{cases}$$

ove:

$$(18)\qquad \begin{cases} S = \mu_{uu} - \dfrac{H_u}{H}\mu_u + \beta\mu_v - P\mu + 4B\beta q + 4pA_u + 2Ap_u + 2Bp_v, \\ T = \mu_{vv} - \dfrac{H_v}{H}\mu_v + \gamma\mu_u - Q\mu + 4A\gamma p + 4qB_v + 2Bq_u + 2Aq_u. \end{cases}$$

Dalle (8) e (16) si trae:

$$(19)\qquad 2A\frac{\partial x_1}{\partial u} - 2B\frac{\partial x_1}{\partial v} + \lambda x_1 = Nx$$

[1] *La teoria proiettiva delle congruenze W.* Questi Rendiconti, vol XXXII, 5° fascicolo, 1° semestre 1923.

Sostituendo in (17) alla x il valore dedotto da (19) si trova che:

$$\frac{\partial^2 x_1}{\partial u^2} - \frac{\partial \log H_1}{\partial u}\frac{\partial x_1}{\partial u} - \beta_1 \frac{\partial x_1}{\partial v} - p_1 x_1 = 0$$

(e analoga scambiando u, p, β con v, q, γ)

ove:

$$\frac{\partial \log H_1}{\partial u} = \frac{\partial \log H}{\partial u} + 2A\frac{S}{N} \quad ; \quad \beta_1 = -\beta - 2B\frac{S}{N} \quad ; \quad p_1 = P + \frac{\lambda S}{N}$$

ossia, per la (I) della Nota precedente:

$$\text{(II)} \qquad \begin{cases} S = \dfrac{1}{2A} N_u & T = -\dfrac{1}{2B} N_v \\ \beta + \beta_1 = -\dfrac{B}{A}\dfrac{N_u}{N} & \gamma + \gamma_1 = -\dfrac{A}{B}\dfrac{N_v}{N} \\ p_1 = P + \dfrac{\lambda}{2A}\dfrac{N_u}{N} & q_1 = Q - \dfrac{\lambda}{2B}\dfrac{N_v}{N} \end{cases}.$$

La (19) si può scrivere:

$$(19^{-bis}) \qquad x = 2A'\frac{\partial x_1}{\partial u} + 2B'\frac{\partial x_1}{\partial v} + \mu' x_1$$

ove:

$$\text{(III)} \qquad A' = \frac{A}{N} = AN', \; B' = -\frac{B}{N} = -BN', \; \mu' = \frac{\lambda}{N} =$$
$$= \lambda N', \; \lambda' = \frac{\mu}{N} = \mu N, \; N' = \frac{H}{H_1} = \frac{1}{N},$$

donde:

$$(10^{-bis}) \qquad A'_v = -B'\gamma_1 \quad , \quad B'_u = -A'\beta_1 .$$

Dunque, se partiamo dalla seconda falda focale, la congruenza si determina sostituendo alle A, B *ecc, le* A′, B′ *ecc. definite da* (III).

Cosicchè, insieme alle ultime (II) varrà p. es. la:

$$p = P_1 + \frac{\lambda'}{2A'}\frac{N'_u}{N'} = P_1 - \frac{\mu}{2A}\frac{N_u}{N}$$

che confrontata con analoga delle (II) dà:

$$p + p_1 = P + P_1 + \frac{\lambda - \mu}{2A}\frac{N_u}{N} .$$

Sostituendo alla P il suo valore (5) ed alla P_1 il valore analogo:

$$P_1 = p_1 + \frac{\partial \beta_1}{\partial v} + \beta_1 \frac{\partial \log H_1}{\partial v} ,$$

si trova per (II):

$$(20)\qquad \begin{cases} N_{uv} + \frac{B}{A}\gamma N_u + \frac{A}{B}\beta N_v = 0\,, \text{ ossia:} \\ \left(\frac{1}{A}N_u\right)_v = -\beta\frac{N_v}{B}\,, \quad \left(\frac{N_v}{B}\right)_u = -\gamma\frac{N_u}{N}\,. \end{cases}$$

Le equazioni (II) *sono evidentemente semplicissime.*

Esse danno il mezzo di calcolare gli elementi di una falda focale di una congruenza W in funzione di quelli dell'altra; le (10) *sono le sole equazioni, alla cui integrazione è ridotta la ricerca delle congruenze W, di cui è data una falda focale. Esse si possono unire alle* (11), (12, (15), (20), *quando si considerino* λ, μ, N *come incognite ausiliarie. Le trattazioni metriche partono invece dalla considerazione della* μ.

Composizione di due trasform. W.

2. Due superficie, come le S, S_1, falde focali di una stessa congruenza W, diconsi trasformate W l'una dell'altra. Noi indicheremo d'ora in poi con A_1, B_1 ecc. le quantità finora indicate con A, B, ecc. E, se S_2 è un'altra trasformata W di S, indicheremo con A_2, B_2 ecc. i relativi valori delle A, B, ecc. Ora, qualunque sieno le costanti z_1, z_2, anche $A = z_1 A_1 + z_2 A_2$, $B = z_1 B_1 + z_2 B_2$ soddisfano alle (10) e perciò determinano una congruenza W. Il relativo valore di N sarà dato da:

$$N = z_1^2 N_1 + z_1 z_2 N_{12} + z_2^2 N_2$$

ove sia posto

$$(21)\quad N_{12} = N_{21} = \lambda_1\mu_2 + \lambda_2\mu_1 + 2A_1\frac{\partial\mu_2}{\partial u} + 2A_2\frac{\partial\mu_1}{\partial u} - 2B_1\frac{\partial\mu_2}{\partial v} - 2B_2\frac{\partial\mu_1}{\partial v}$$
$$+ 8pA_1A_2 - 8qB_1B_2\,.$$

Per la prima delle (II) (essendo μ, S, T ecc. lineari nelle z e quindi p. es. $S = z_1 S_1 + z_2 S_2$):

$$\frac{1}{2A}\frac{\partial N}{\partial u} = \frac{1}{2(z_1 A_1 + z_2 A_2)}\left(z_1^2\frac{\partial N_1}{\partial u} + z_1 z_2\frac{\partial N_{12}}{\partial u} + z_2^2\frac{\partial N_2}{\partial u}\right) =$$

$$= S = z_1 S_1 + z_2 S_2 = \frac{z_1}{2A_1}\frac{\partial N_1}{\partial u} + \frac{z_2}{2A_2}\frac{\partial N_2}{\partial u}\,, \text{ cioè:}$$

$$(22)\qquad \frac{\partial N_{12}}{\partial u} = \frac{A_2}{A_1}\frac{\partial N_1}{\partial u} + \frac{A_1}{A_2}\frac{\partial N_2}{\partial u}\,.$$

Introduciamo due funzioni ω, Ω ponendo:

$$(23)\quad \begin{cases} \omega + \Omega = N_{12} \\ \omega_u = \dfrac{A_2}{A_1}\dfrac{\partial N_1}{\partial u} \qquad \text{e quindi} \qquad \Omega_u = \dfrac{A_1}{A_2}\dfrac{\partial N_2}{\partial u} \\ \omega_v = \dfrac{B_2}{B_1}\dfrac{\partial N_1}{\partial v} \qquad\qquad\qquad \Omega_v = \dfrac{B_1}{B_2}\dfrac{\partial N_2}{\partial v} \end{cases}.$$

La illimitata integrabilità delle equazioni in ω_u, ω_v si deduce immediatamente, osservando che, in virtù di (20), da entrambe si deduce:

$$(23^{-bis})\qquad \omega_{uv} = -\frac{A_2\beta}{A_1}\frac{\partial N_1}{\partial v} - \frac{B_2\gamma}{A_1}\frac{\partial N_1}{\partial u}$$

Poniamo:

$$(24)\quad \begin{cases} x_{12} = \omega x + \left(-\lambda_2 x_1 - 2A_2\dfrac{\partial x_1}{\partial u} + 2B_2\dfrac{\partial x_1}{\partial v}\right) \\ x_{21} = \Omega x + \left(-\lambda_1 x_2 - 2A_1\dfrac{\partial x_2}{\partial u} + 2B_1\dfrac{\partial x_2}{\partial v}\right) \end{cases}.$$

Sostituendo alle x_i i valori dati da (8), (16) si trova che:

$$x_{12} + x_{21} = x(\omega + \Omega - N_{12}) = 0$$

cioè *che i punti* x_{12} *ed* $x_{21} = -x_{12}$ *coincidono* (essendo le x coordinate omogenee).

Per le (19) si può anche scrivere:

$$(24^{-bis})\qquad x_{12} = x_1\left(-\lambda_2 + \lambda_1\frac{\omega}{N_1}\right) + \frac{\partial x_1}{\partial u}\left(-2A_2 + 2\frac{A_1}{N_1}\omega\right) + \\ + \frac{\partial x_1}{\partial v}\left(2B_2 - \frac{2B_1}{N_1}\omega\right)$$

insieme all'analoga per x_{21}.

Queste equazioni dicono che $x_{12} = -x_{21}$ *giace sia sul piano tangente ad* S_1 *nel punto* x_1 *corrispondente, che sul piano tangente ad* S_2 *nel corrispondente punto* x_2.

Posto poi:

$$(25)\quad \begin{cases} A_1^1 = -A_2 + \dfrac{A_1}{N_1}\omega \qquad\qquad B_1^1 = B_2 - \dfrac{B_1}{N_1}\omega \\ \mu_1^1 = -\dfrac{\partial B_1^1}{\partial v} - \dfrac{\partial A_1^1}{\partial u} - B_1^1\dfrac{\partial \log H_1}{\partial v} - A_1^1\dfrac{\partial \log H_1}{\partial u}\,;\ \lambda_1^1 = \dfrac{\partial B_1^1}{\partial v} - \dfrac{\partial A_1^1}{\partial u} + \cdots \end{cases}$$

si prova facilmente che

$$(25^{-bis})\qquad \frac{\partial A_1^1}{\partial v} = -B_1^1\gamma_1\ ;\quad \frac{\partial B_1^1}{\partial u} = -A_1^1\beta_1\ ;$$

$$\mu_1^1 = -\lambda_2 + \lambda_1\frac{\omega}{N_1}\ ;\quad \lambda_1^1 = -\mu_2 + \mu_1\frac{\omega}{N_1}.$$

Si ha anche:

$$(25^{-ter}) \quad N_1^1 = 2A_1^1\left(\frac{\partial \mu_1^1}{\partial u} + 2A_1 p_1\right) - 2B_1^1\left(\frac{\partial \mu_1^1}{\partial v} + 2B_1^1 q_1\right) + \lambda_1^1 \mu_1^1$$
$$= N_2 + \frac{\omega^2}{N_1} - \frac{\omega}{N_1} N_{12},$$

Perciò in virtù di (25), (25^{-bis}) *il punto* x_{12} *definito da* (24) [confronta le analoghe 8, 10, 11, 12] *descrive la seconda falda focale* S_{12} *di una congruenza* W, *di cui* S_1 *è la prima falda. Altrettanto dicasi della relazione tra* S_{12} *ed* S_2.

Perciò le ∞^1 *superficie* S_{12} [dipendenti dalla costante arbitraria, da cui dipendono le ω, Ω in virtù di (23)] *si ottengono da* S *componendo le due trasformazioni* W *da noi studiate. Esse si ottengono con la quadratura necessaria a determinare* ω. *Per* $\omega = \infty$ *esse tendono alla superficie* S *di partenza.*

Sia la S_1, *che* S_2, *che ognuna delle superficie seconda falda delle congruenze* W *ottenute da* S *ponendo* $A = z_1 A_1 + z_2 A_2$, $B = z_1 A_1 + z_2 B_2$ ($z_i =$ cost.) *formano con ciascuna delle* S_{12} *le falde focali di una congruenza* W.

Otteniamo così quello che potremmo chiamare un sistema di Bianchi di congruenze W, (data la relazione tra tale sistema e i celebri *teoremi di permutabilità del Bianchi*).

Meccanica. — *Sulla possibilità della navigazione extra-atmosferica.* Nota del Corrispondente G. A. Crocco.

La navigazione nel vuoto o in aria molto rarefatta importa la possibilità di un propulsore che non abbia bisogno di appoggiarsi sul mezzo ambiente, quale il propulsore *a reazione*.

Questo tipo di propulsore consiste, come è noto, in un congegno capace di lanciare nello spazio continuamente una massa materiale ad alta velocità; onde si sviluppi in direzione opposta una spinta reattiva.

Se m è la massa consumata nell'unità di tempo, αm la frazione di essa proiettata con velocità v; βv la media proiezione geometrica di v in senso opposto alla forza reattiva F; e se la massa proiettata è tutta preventivamente contenuta nel mobile; avremo per un noto teorema di meccanica:

$$F = \alpha\beta\, m v;$$

cosicchè, se v è costante, anche F sarà costante e la massa residua del mobile potrà assumere velocità dello stesso ordine di v. Il motore a reazione, quindi, può condurre alla realizzazione di alte velocità di traslazione; e si presta in principio alla navigazione extra-atmosferica.

Cerchiamo a quali condizioni.