# ATTI

DELLA

# REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

ANNO CCCXX

1923

---

SERIE QUINTA

---

## RENDICONTI

---

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

---

**VOLUME XXXII.**

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1923

# NOTE PRESENTATE DA SOCI

**Geometria.** — *Nouvelles formules de la géométrie affine.* Nota di EDUARD ČECH presentata dal Corrispondente G. FUBINI.

**1.** Dans l'espace affine, où le groupe fondamental est celui des affinités unimodulaires, on a à considérer deux classes contragrédientes de vecteurs, ceux de la premiere classe $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ ayant comme composantes des différences de coordonnées de deux points.

Le produit vectoriel $\alpha \times \beta$ $(A \times B)$ de deux vecteurs de la première (seconde classe) est un vecteur de la seconde (première) classe, le produit scalaire $\alpha \,.\, A$ de deux vecteurs de classes différentes et le déterminant $(\alpha\,\beta\,\gamma)$ ou $(A\,B\,C)$ de trois vecteurs de la même classe sont des quantités scalaires.

**2.** Si le point $x$ décrit une *courbe gauche* orientée $C$, je fixe le facteur du vecteur (de la seconde classe) de direction du plan osculateur moyennant la condition

$$dx = \varepsilon \xi \times d\xi \,,\; \varepsilon = \pm 1 \,.$$

Le plus simple paramètre intrinsèque ou l'arc affine $\lambda$ est défini à une constante additive près, par une quelconque des expressions

$$d\lambda^3 = dx \,.\, d^2\xi = - d^2 x \,.\, d\xi = \varepsilon(\xi \,,\, d\,\xi \,,\, d^2\xi) \,,\; d\lambda^6 = \varepsilon(dx \,,\, d^2x \,,\, d^3x) \,.$$

L'accent signifiant dérivation par rapport à $\lambda$, je pose

$$A = \xi'' \,,\; B = -\xi' \,,\; C = \varepsilon\xi \,,\; (A\,BC) = 1 \,,$$
$$\alpha = B \times C \,,\; \beta = C \times A \,,\; \gamma = A \times B \,.$$

On a deux invariants $k$ et $l$ dont les expressions indépendantes de la variable indépendante sont

$$l\, d\lambda^6 = d^3 x \,.\, d^3\xi \,,\; k\, d\lambda^8 = d\lambda^3 \left[ d^3x \,.\, d^2\xi - \frac{1}{3} d^2(d\lambda^3) \right] + \frac{5}{9} \left[ d(d\lambda^3) \right]^2 ;$$

remarquons que l'on a aussi

$$d^3x \,.\, d^2\xi = - d^2 x \,.\, d^3\xi = - \varepsilon(\xi \,,\, d^2\xi \,,\, d^3\xi) \,.$$

Formules analogues à celles de Frenet :

$$\alpha' = \beta \,,\; \beta' = k\alpha + \varepsilon\gamma \,,\; \gamma' = - \varepsilon\, l\, \alpha \,,$$
$$A' = - kB + \varepsilon\, l\, C \,,\; B' = - A \,,\; C' = - \varepsilon B \,.$$

**3.** Considérons la *bande d'éléments de contact du seconde ordre* d'une surface non développable S le long d'une courbe non asymptotique C. Soit $x$ le point de C, $\xi$ le vecteur de direction du plan tangent de S. On choisit le facteur de $\xi$ de telle manière que

$$dx \pm \sqrt{\varepsilon}\,\xi \times d\xi \qquad (\varepsilon = \pm 1)$$

soient les directions des tangentes asymptotiques de S et que $\xi \,.\, d^2x > 0$.

Le plus simple paramètre intrinsèque ou *l'arc affine* $\lambda$ de la bande sera défini par l'équation

$$d\lambda^2 = \xi \,.\, d^2x = -\, d\xi \,.\, dx\,.$$

La bande possède quatre invariants P, Q, R, T dont les expressions indépendantes de la variable indépendante sont

$$\mathrm{P}\,d\lambda^3 = \frac{1}{2}(dx \,.\, d^2\xi - d^2x \,.\, d\xi)\ ,\ \mathrm{Q}\,d\lambda^6 = (dx \times d^2x) \,.\, (d\xi \times d^2\xi)\,,$$

$$\mathrm{R}\,d\lambda^6 = (dx\,, d^2x\,, d^3x)\ ,\ \mathrm{T}\,d\lambda^3 = (\xi\,, d\xi\,, d^2\xi)\,.$$

J'introduis un trièdre mobile $(x\alpha\beta\gamma)$ en posant

$$\alpha = x'\,,\ \beta = x'' - \mathrm{P}x'\,,\ \gamma = \xi \times \xi'\,,\ (\alpha\,\beta\,\gamma) = 1\,,$$
$$\mathrm{A} = \beta \times \gamma\,,\ \mathrm{B} = \gamma \times \alpha\,,\ \mathrm{C} = \alpha \times \beta\,,$$

les accents signifiant dérivation par rapport à $\lambda$.

Formules analogues à celles de Frenet:

$$\alpha' = \mathrm{P}\alpha + \beta\,,\ \beta' = -\,\mathrm{Q}\alpha + \mathrm{R}\gamma\,,\ \gamma' = \mathrm{T}\alpha - \mathrm{P}\gamma\,,$$
$$\mathrm{A}' = -\,\mathrm{PA} + \mathrm{QB} - \mathrm{TC}\,,\ \mathrm{B}' = -\,\mathrm{A}\,,\ \mathrm{C}' = -\,\mathrm{RB} + \mathrm{PC}\,.$$

**4.** Pour déterminer intrinsèquement la *bande d'éléments de contact du troisième ordre* de S de long de C, il faut connaître encore un autre invariant N à l'aide duquel le vecteur X de la normale affine s'exprime en fonction linéaire de $\beta$ et $\gamma$ selon la formule

$$\mathrm{X} = \beta + \mathrm{N}\gamma\,.$$

**5.** Si le point $x$ décrit une surface S non développable, $u$ et $v$ étant les variables indépendantes [1], on peut fixer le facteur du vecteur (de la seconde classe) $\xi$ de direction du plan tangent moyennant l'équation

$$\xi(\xi\,\xi_1\,\xi_2) = -\,\varepsilon\, x_1 \times x_2 \quad , \quad \varepsilon^2 = 1\,,$$

[1] Quelquefois, je pose $u = u_1\,,\, v = u_2$.

l'indice $i$ indiquant la dérivée par rapport a $u_i$. Le vecteur X de la normale affine est défini par les équations

$$X \, . \, \xi = 1 \;\; , \;\; X \, . \, \xi_1 = 0 \;\; , \;\; X \, . \, \xi_2 = 0 \; ;$$

on suppose le signe de X choisi de façon à avoir $(x_1 \, x_2 \, X) > 0$. Les deux formes différentielles de MM. Pick et Blaschke sont

$$F_2 = - \, dx \, . \, d\xi = \Delta_{11} \, du^2 + 2\Delta_{12} \, du \, dv + \Delta_{22} \, dv^2 \, ,$$

$$F_3 = \frac{1}{2}(dx \, . \, d^2\xi - d^2 x \, . \, d\xi) = \Delta_{111} \, du^3 + 3\Delta_{112} \, du^2 \, dv + 3\Delta_{122} \, du \, dv^2 + \Delta_{222} \, dv^3 .$$

On pose

$$\nabla = \Delta_{11} \, \Delta_{22} - \Delta_{12}^2 \, .$$

Alors

$$\varepsilon = - \operatorname{sgn} \nabla \, , \, (x_1 \, x_2 \, X) = \sqrt{|\nabla|} \;\; , \;\; (\xi \, \xi_1 \, \xi_2) = - \, \varepsilon \sqrt{|\nabla|} \, .$$

Encore, je pose

$$\vartheta_{11} = \frac{\Delta_{22}}{\nabla} \quad , \quad \vartheta_{12} = - \frac{\Delta_{12}}{\nabla} \quad , \quad \vartheta_{22} = \frac{\Delta_{11}}{\nabla} \, .$$

$$J = \frac{1}{\nabla^2} \begin{vmatrix} \Delta_{111} & \Delta_{112} & \Delta_{122} \\ \Delta_{112} & \Delta_{122} & \Delta_{222} \\ \Delta_{11} & \Delta_{12} & \Delta_{22} \end{vmatrix} .$$

$$H = J + \text{courbure de } F_2 \, .$$

J'emploie le calcul absolu. $F_2$ étant la forme fondamentale, je dénote par $\varphi_i$, $\varphi_{ik}$ ... les dérivées covariantes successives d'un invariant $\varphi$, $c_{i_1 \ldots i_\alpha | j}$, $c_{i_1 \ldots i_\alpha | jk}$ les systèmes déduites par dérivation covariante du système covariant $c_{i_1 \ldots i_\alpha}$, et si

$$C = \sum_{i_1 \ldots i_\alpha} c_{i_1 \ldots i_\alpha} du_{i_1} \ldots du_{i_\alpha} ,$$

je pose

$$\delta C = \sum_{i_1 \ldots i_\alpha j} c_{i_1 \ldots i_\alpha | j} \, du_{i_1} \ldots du_k \, du_j \;\; , \;\; \delta^2 C = \sum_{i_1 \ldots i_\alpha jk} c_{i_1 \ldots i_\alpha | jk} \, du_{i_1} \ldots du_{i_\alpha} du_j \, du_k \, .$$

J'emploie aussi les différentielles contravariantes de M. Levi-Civita et Fubini

$$\overset{2}{\delta u_i} = \overset{2}{d u_i} + \sum_{rs} \left\{ \begin{matrix} rs \\ i \end{matrix} \right\} du_r \, du_s \;\; , \;\; \overset{3}{\delta u_i} = d\left(\overset{2}{\delta u_i}\right) + \sum_{rs} \left\{ \begin{matrix} rs \\ i \end{matrix} \right\} du_r \, \overset{2}{\delta u_s} \, .$$

Je pose

$$D_{11} = \frac{1}{\sqrt{|\nabla|}} (\Delta_{111/2} - \Delta_{112/1}),$$

$$D_{12} = \frac{1}{\sqrt{|\nabla|}} (\Delta_{112/2} - \Delta_{122/1}), \; D_{22} = \frac{1}{\sqrt{|\nabla|}} (\Delta_{122/2} - \Delta_{222/1}),$$

$$D_1 = \frac{1}{\sqrt{|\nabla|}} (D_{11/2} - D_{12/1}),$$

$$D_2 = \frac{1}{\sqrt{|\nabla|}} (D_{12/2} - D_{22/1}), \; D = \frac{1}{\sqrt{|\nabla|}} (D_{1/2} - D_{2/1}),$$

$$\vartheta = d_{11}\, du^2 + 2 d_{12}\, du\, dv + d_{22}\, dv^2 = \frac{\varepsilon}{\sqrt{|\nabla|}} \begin{vmatrix} D_{11}\, du + D_{12}\, dv\,, & D_{12}\, du + D_{22}\, dv \\ \Delta_{11}\, du + \Delta_{12}\, dv\,, & \Delta_{12}\, du + \Delta_{22}\, dv \end{vmatrix},$$

$$F_2^{(i)} = \Delta_{1i}\, du + \Delta_{2i}\, dv\,, \; F_3^{(i)} = \Delta_{11i}\, du^2 + 2\Delta_{12i}\, du\, dv + \Delta_{22i}\, dv^2. (i = 1\,, 2).$$

Les équations fondamentales et leurs conditions d'intégrabilité (Radon) sont

$$\sum_{ik} x_{ik}\, du_i\, du_k = \sum_{rs} \vartheta_{rs}\, F_3^{(r)}\, x_s + F_2\, X\,,$$

$$dX = -H\, dx + \sum_{irs} \vartheta_{rs}\, d_{ir}\, du_i\, x_s\,,$$

$$\sum_{ik} \xi_{ik}\, du_i\, du_k = -\sum_{rs} \vartheta_{rs}\, F_3^{(r)}\, \xi_s + (\vartheta - HF_2)\, \xi\,,$$

$$H_i - \varepsilon D_i = \begin{vmatrix} \Delta_{i11} & \Delta_{i12} & \Delta_{i22} \\ \Delta_{11} & \Delta_{12} & \Delta_{22} \\ D_{11} & D_{12} & D_{22} \end{vmatrix} \; (i = 1\,, 2).$$

**6**. J'ai calculé l'arc affine $\lambda$ et les invariants $k$ et $l$ d'une courbe asymptotique, ainsi que le trièdre mobile attaché à la courbe (voir n° 2).

Si $e = \operatorname{sgn} F_3$, on a

$$d\lambda^3 = |F_3|\,, \; k = \frac{F_3^2\, \vartheta + \frac{5}{9} (\delta F_3)^2 - \frac{1}{3} F_3\, \delta^2 F_3}{F_3{}^{8/3}}\,, \; l = e \left( \frac{\delta \vartheta}{F_3} + H \right).$$

$$eA = \frac{3\vartheta}{F_3{}^{1/3}}\, \xi - \frac{\delta F_3}{F_3{}^{5/3}}\, d\xi - \frac{3 \sum_{rs} \vartheta_{rs}\, F_3^{(r)}\, \xi_s}{F_3{}^{2/3}}\,,$$

$$eB = -\frac{d\xi}{F_3{}^{1/3}}\,, \; eC = \varepsilon' \xi\,.$$

L'$\varepsilon'$ est l'$\varepsilon$ du n° 2, et peut être déterminé d'une quelconques des deux équations

$$F_2^{(1)} = -\varepsilon' \sqrt{|\nabla|}\, dv \quad , \quad F_2^{(2)} = \varepsilon' \sqrt{|\nabla|}\, du\,.$$

**7.** J'ai calculé aussi l'arc affine $\lambda$ et les cinq invariants P , Q , R , T , N de la bande d élément de contact du troisième ordre le long d'une courbe non asymptotique. L'$\varepsilon$ du n° 3 est égal à l'$\varepsilon$ du n° 5. Si $e = \operatorname{sgn} F_2$, on a

$$d\lambda^2 = |F_2|\,,\ P = e\frac{F_3}{|F_2|^{3/2}}\,,\ T = e\,(T_s + T_g)\,,\ N = e\,\varepsilon\,(T_s - T_g)\,,$$

$$T_g = -\varepsilon\frac{\sqrt{|\nabla|}}{|F_2|^{3/2}}\left(du\,\delta^2 v - dv\,\delta^2 u\right),\ T_s = \frac{1}{\sqrt{|\nabla F_2^3|}}\begin{vmatrix} F_3^{(1)} & F_3^{(2)} \\ F_2^{(1)} & F_2^{(2)} \end{vmatrix},$$

$$\frac{1}{2}J = e\left(\varepsilon\, T_s^2 - P^2\right),$$

$$Q = NT + e\left(H - \frac{\vartheta}{F_2}\right),$$

$$R = NP - \frac{dN}{d\lambda} + \frac{D_{11}\,du^2 + 2\,D_{12}\,du\,dv + D_{22}\,dv^2}{|F_2|}\,.$$

Les vecteurs $\alpha$ , $\beta$ , $\gamma$ du trièdre mobile attaché à la bande sont donnés par les équations

$$\alpha = \frac{dx}{|F_2|^{1/2}}\,,\ e\,\beta = \varepsilon\,(T_g - T_s)\,\gamma + X\,,$$

$$\gamma = -\frac{1}{\sqrt{|\nabla F_2|}}\begin{vmatrix} F_2^{(1)} & x_1 \\ F_2^{(2)} & x_2 \end{vmatrix}.$$

**8.** Le lecteur trouvera les démonstrations et tous les détails dans mon Mémoire « Courbes tracées sur une surface dans l'espace affine » qui paraîtra dans les Publications de la Faculté des Sciences de l'Université Masaryk, Brno, Tchécoslovaquie.