ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE

DEI LINCEI

ANNO CCCXX

1923

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXXII.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1923

Matematica. — *Potenziale di un disco con distribuzione simmetrica.* Nota di ROCCO SERINI, presentata dal Socio TULLIO LEVI CIVITA.

La presente Nota contiene il risultato fondamentale ottenuto dal Beltrami nella Memoria *Sulla teoria delle funzioni potenziali simmetriche* (¹). I metodi ch'io seguo sono però più semplici e credo presentino qualche interesse, specialmente per le applicazioni ch'io ne sto tentando ad altri problemi, p. e. a quelli della distribuzione elettrica sopra una corona circolare e sopra un disco con anello di guardia, dei quali problemi scriverò in fine le equazioni.

1. PRELIMINARI. — Se $I_0(x)$ è la funzione cilindrica di 1ª specie d'ordine zero, è ben noto che la funzione

$$\varphi(r, z) = \int_0^\infty e^{\pm zs} I_0(rs)\, \psi(s)\, ds \tag{1}$$

con $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ rappresenta la funzione potenziale di una distribuzione simmetrica sul piano $z = 0$ la cui densità è proporzionale a

$$\int_0^\infty I_0(rs)\, s\, \psi(s)\, ds. \tag{2}$$

Quindi, se è imposta alla φ la condizione di prendere valori assegnati nell'interno del disco $(r < a\,,\, z = 0)$ e alla densità di annullarsi all'infuori di esso, la $\psi(s)$ dovrà soddisfare alle due equazioni

$$\int_0^\infty I_0(rs)\, \psi(s)\, ds = V(r) \quad \text{per } r < a\,, \tag{3}$$

$$\int_0^\infty I_0(rs)\, s\, \psi(s)\, ds = 0 \quad \text{per } r > a\,. \tag{4}$$

Sono queste le equazioni che ha risolto il Beltrami fondandosi sopra i risultati di una sua precedente Memoria (²).

2. PRIMO METODO. — Io farò vedere come si possa risolvere il problema fondandomi sopra note proprietà integrali delle funzioni cilindriche

(¹) Memorie Acc. Bologna, Serie IV, tomo II, 1880, pp. 461-505, oppure *Opere*, tomo 3°, pp. 349-382.

(²) *Opere*, tomo 3°, pp. 269-304.

$I_0(x)$, $I_1(x) = -I_0'(x)$, riducendo il sistema ad una equazione integrale di Abel. Le accennate proprietà integrali sono espresse dalle formole [3]

$$(5) \qquad \int_0^\infty I_1(rs) \cos st \, ds = \frac{1}{r} \qquad \text{per } t < r ,$$

$$(6) \qquad \int_0^\infty I_0(rs) \cos st \, ds = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{r^2 - t^2}} & \text{per } t < r , \\ 0 & \text{per } t > r , \end{cases}$$

Intanto, tenuto conto della equazione differenziale a cui soddisfa $I_0(x)$ che si può scrivere

$$\frac{d}{ds} [s \, I_0'(rs)] + rs \, I_0(rs) = 0$$

la (4) prende la forma

$$(4') \qquad \frac{d}{dr}\left(r \int_0^\infty I_1(rs) \, \varphi(s) \, ds \right) = 0 \qquad \text{per } r > a .$$

Ma allora per la (5) la funzione

$$\varphi(s) = \cos st \quad \text{per } t < a$$

od anche la

$$\psi(s) = \int_0^a f(t) \cos st \, dt$$

con $f(t)$ funzione arbitraria soddisfa la (4') equivalente alla (4). Rimarrà quindi da determinare $f(t)$ in modo tale che

$$(3') \qquad \int_0^\infty I_0(rs) \, ds \int_0^a f(t) \cos st \, dt = V(r) \qquad r < a .$$

Se in questa invertiamo le derivazioni e teniamo conto della (6), otteniamo la nuova equazione

$$\int_0^r \frac{f(t)}{\sqrt{r^2 - t^2}} \, dt = V(r) ;$$

è questa una equazione di Abel, che colla sostituzione $t = r \operatorname{sen} \theta$ si riduce

$\left(\text{osservando poi che } \int_0^{\frac{\pi}{2}} = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \right)$ alla forma

$$(3'') \qquad \int_0^\pi f(r \operatorname{sen} \theta) \, d\theta = 2V(r) .$$

[3] Memorie (1), Appendice.

Sotto la forma (3″) è stata considerata dal Beltrami [4] che ne dà la soluzione

$$f(r) = \frac{2}{\pi}\left[V(o) + r\int_0^{\frac{\pi}{2}} V'(r \operatorname{sen}\theta)\, d\theta \right] =$$
$$= \frac{2}{\pi}\left[V(o) + r\int_0^r \frac{V'(\tau)}{\sqrt{r^2-\tau^2}}\, d\tau \right].$$

In conclusione

$$(7) \qquad \psi(s) = \frac{2}{\pi}\left[V(o)\int_0^a \cos st\, dt + \int_0^a t\cos st\, dt \int_0^t \frac{V'(\tau)}{\sqrt{t^2-\tau^2}}\, d\tau \right] =$$
$$= \frac{2}{\pi} V(o)\frac{\operatorname{sen} as}{s} + \frac{2}{\pi}\int_0^a t\cos st\, dt \int_0^t \frac{V'(\tau)}{\sqrt{t^2-\tau^2}}\, d\tau .$$

3. Secondo metodo. — Ma il metodo più naturale per risolvere le (3)-(4) sarebbe quello di partire dal teorema di Hankel [5] pel quale la soluzione più generale della (4) è data da

$$\psi(s) = \int_0^a I_0(st)\, t\, \chi(t)\, dt,$$

con $\chi(t)$ funzione arbitraria da determinarsi colla (3) in modo quindi che sia

$$(8) \qquad \int_0^\infty I_0(rs)\, ds \int_0^a I_0(st)\, t\, \chi(t)\, dt = V(r) \ , \ r < a .$$

Poniamo

$$(9) \qquad \chi(t) = \int_t^a \frac{f_1(u)\, du}{\sqrt{u^2-t^2}} :$$

la (8) diventerà

$$(8') \qquad \int_0^\infty I_0(rs)\, ds \int_0^a I_0(st)\, t\, dt \int_t^a \frac{f_1(u)\, du}{\sqrt{u^2-t^2}} = V(r) \ , \ r < a,$$

e di qui, invertendo le due ultime integrazioni ed applicando il teorema di Dirichlet,

$$\int_0^\infty I_0(rs)\, ds \int_0^a f_1(u)\, du \int_0^u \frac{I_0(st)\, t}{\sqrt{u^2-t^2}}\, dt = V(r) \ , \ r < a .$$

L'ultimo integrale, colla sostituzione $t = u \operatorname{sen}\theta$, diventa

$$u\int_0^{\frac{\pi}{2}} I_0(su \operatorname{sen}\theta) \operatorname{sen}\theta\, d\theta = \frac{\operatorname{sen} su}{s} , \ [6]$$

[4] Beltrami, *Intorno ad un teorema di Abel ed alcune sue applicazioni*. Rend. Ist. Lombardo, Serie II, vol. XIII (1880), pp. 327-337, oppure *Opere*, tomo 3°, pp 248-257.

[5] Mathematische Annalen, Bd. 8, p. 482 (1875).

[6] Vedi nota [4].

avremo quindi come trasformata della (8')

$$(8'') \qquad \int_0^\infty I_0(rs)\frac{ds}{s}\int_0^a f_1(u)\,\mathrm{sen}\,su\,du = V(r) \quad , \quad r < a\,.$$

Ora, osservando che

$$\frac{\mathrm{sen}\,su}{s} = \int_0^u \cos st_1\,dt_1\,,$$

si può anche scrivere

$$\int_0^\infty I_0(rs)\,ds\int_0^a f_1(u)\,du\int_0^u \cos st_1\,dt_1 = V(r) \quad , \quad r < a:$$

ed applicando nuovamente il teorema di Dirichlet

$$(8''') \qquad \int_0^\infty I_0(rs)\,ds\int_0^a \cos st_1\,dt_1\int_{t_1}^a f_1(u)\,du = V(r) \quad , \quad r < a\,.$$

Ma questa non è che l'equazione (3') avendosi tra f e f_1 la relazione

$$(10) \qquad f(t) = \int_t^a f_1(u)\,du\,.$$

Basta ora trattare la (8''') come la (3') per ottenere il risultato finale.

4. Equazioni per l'equilibrio elettrico sopra una corona circolare e sopra un disco con anello di guardia. — Siano a, $a+h$ i raggi della corona circolare, 1 il suo potenziale. Dovrà allora essere soddisfatta la (4) per $r > a+h$, $r < a$ e per questo basta pel teorema di Hankel prendere

$$\psi(s) = \int_a^{a+h} I_0(st)\,t\,\chi(t)\,dt\,.$$

Rimarrà quindi da determinare $\chi(t)$ in modo tale che per la (3)

$$(11) \qquad \int_0^\infty I_0(rs)\,ds\int_a^{a+h} I_0(st)\,t\,\chi(t)\,dt = 1 \quad \text{per } a < r < a+h\,.$$

Sia ora un disco a potenziale 1 (raggio a) e una corona circolare (anello di guardia) di raggi $a+h$, $a+h+k$ (a potenziale zero). Se prendiamo

$$\psi(s) = \int_0^a I_0(st)\,t\,\chi_1(t)\,dt + \int_{a+h}^{a+h+k} I_0(st)\,t\,\chi_2(t)\,dt$$

è soddisfatta la (4) per $a < r < a+h$, $r > a+h+k$.

Si dovranno quindi determinare le due funzioni incognite $\chi_1(t)$, $\chi_2(t)$ in modo tale che

$$(12) \quad \int_0^\infty I_0(rs)\,ds\int_0^a I_0(st)\,t\,\chi_1(t)\,dt + \int_0^\infty I_0(rs)\,ds\int_{a+h}^{a+h+k} I_0(st)\,t\,\chi_2(t)\,dt =$$

$$= \begin{cases} 1 & \text{per } r < a \\ 0 & \text{per } a+h < r < a+h+k\,. \end{cases}$$