ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE

DEI LINCEI

ANNO CCCXX

1923

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXXII.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1923

Matematica. — *Sopra la teoria delle quadrature delle meccaniche.* Nota di W. Stekloff, Vicepresidente dell'Accademia di Russia, presentata dal Socio T. Levi-Civita.

1. Sia $p(x)$ una funzione assegnata integrabile in un dato intervallo da a a b $(b > a)$, la quale non assume in questo intervallo valori negativi; $f(x)$ qualsiasi altra funzione integrabile nell'intervallo (a, b).

Prendiamo una successione di numeri

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n,$$

compresi fra a e b, e un'altra successione di numeri ad essi corrispondenti

$$A_1, A_2, A_3, \dots, A_n,$$

e determiniamo a_k ed A_k $(k = 1, 2, 3, \dots, n)$ in modo che per ogni polinomio $P_m(x)$ di grado non superiore a m, dove m è un numero non maggiore di $2n - 1$, abbia luogo l'eguaglianza

$$(1) \qquad \int_a^b p(x)\, P_m(x)\, dx = \sum_{k=1}^{n} A_k\, P_m(a_k).$$

Otteniamo $m + 1$ delle equazioni

$$(2) \qquad A_1 a_1^k + A_2 a_2^k + \dots + A_n a_n^k = \int_a^b p(x)\, x^k\, dx \qquad (k = 0, 1, 2, \dots, m)$$

cui debbono soddisfare $2n$ dei valori a_k ed A_k.

Di essi $2n - (m + 1)$ rimarranno, in generale, arbitrari, mentre gli altri $m + 1$ verranno espressi pei precedenti mediante le equazioni (2).

I numeri A_k ed a_k dipenderanno soltanto dai numeri a, b e dalla funzione $p(x)$, ma non dalla funzione $f(x)$.

Definiti così gli A_k ed a_k, poniamo

$$(3) \qquad \int_a^b p(x)\, f(x)\, dx = \sum_{k=1}^{n} A_k\, f(a_k) + R_n.$$

Otteniamo la formula per il calcolo approssimato dell'integrale del primo membro di questa equazione col resto R_n, la quale porta il nome di *formula delle quadrature meccaniche.*

Esiste una quantità infinita di tali formule fra cui meritano attenzione speciale quelle coi coefficienti A_k positivi.

Tali sono la nota formula di Gauss, le formule indicate dal Markoff [cfr. il suo « Calcolo delle differenze finite » in russo, Odessa, 1910], la

formula di Tchebicheff, le formule di Tchebicheff generalizzate da Sonin e moltissime altre.

2. T. Stieltjes nella sua Memoria « *Quelques recherches sur la théorie des quadratures dites mécaniques* » (Ann. de l'École Norm., Paris, 1884, III sér. t. I) ha dimostrato che *il resto R_n della formula di Gauss tende a zero, per $n = \infty$, qualunque sia la funzione $f(x)$ integrabile (nel senso di Riemann) nell'intervallo (a, b)* ossia, come converremo di dire, *la formula di Gauss converge per ogni funzione integrabile*. L'analisi di Stieltjes è basata sulla nota proprietà della distribuzione delle radici dei polinomi di Legendre.

In questa Nota mi propongo di dimostrare, mediante un altro metodo molto semplice, il teorema generale che vale per qualisivogliano formule di quadrature con coefficienti positivi e comprende il teorema di T. Stieltjes come caso particolare.

La dimostrazione sarà basata sopra un teorema analogo che vale per qualsiasi funzione $f(x)$ *continua* nel dato intervallo (a, b), e per ogni formula delle quadrature i cui coefficienti soddisfano alla condizione

$$\sum_{k=1}^{n} \left| A_k \right| < A, \tag{4}$$

dove A è un numero determinato.

3. Sia $\varphi(x)$ una funzione arbitraria da x; $P_m(x)$ un polinomio arbitrario di grado $m \leqq 2n - 1$.

Poniamo

$$\varphi(x) = P_m(x) + \varrho_m(x). \tag{5}$$

Applicando la formula (3) alle funzioni $\varphi(x)$ e $P_m(x)$ ed indicando con R'_n il resto di questa formula per $\varphi(x)$, otteniamo

$$R'_n = \int_a^b p(x)\, \varrho_m(x)\, dx = \sum_{k=1}^{n} A_k \varrho_m(x). \tag{6}$$

Applicando poi la formula (3) alle funzioni $\varphi(x)$ e $f(x)$, dove $f(x)$ è un'altra qualsiasi funzione di x, ed indicando con R_n il resto per la funzione $f(x)$, otteniamo

$$R_n = R'_n + \sum A_k [\varphi(a_k) - f(a_k)] - \int_a^b p(x) [\varphi(x) - f(x)]\, dx. \tag{7}$$

Questa formula vale per due funzioni qualisivogliano $f(x)$ e $\varphi(x)$ e per qualunque polinomio $P_m(x)$ di grado non superiore a $2n - 1$.

4. Poniamo per maggior semplicità

$$a = -1 \quad , \quad b = +1$$

ed indichiamo con

$$X_k(x) \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

i polinomi di Legendre corrispondenti all'intervallo $(-1, +1)$.

Poniamo

$$\varrho_m(x) = \varphi(x) - \sum_{k=0}^{m} \frac{2k+1}{2} B_k X_k(x), \tag{8}$$

dove

$$B_k = \int_{-1}^{+1} \varphi(x) X_k(x)\, dx. \tag{9}$$

E' facile persuadersi che

$$\varrho_m(x) = \frac{m+1}{2}\left(X_{m+1}(x)\int_{-1}^{+1} F(x, y) X_m(y)\, dy - \right. \tag{10}$$
$$\left. - X_m(x)\int_{-1}^{+1} F(x, y) X_{m+1}(y)\, dy\right),$$

dove si è posto

$$F(x, y) = \frac{\varphi(x) - \varphi(y)}{x - y}.$$

Supponiamo che la funzione $\varphi(x)$ ammetta le derivate dei due primi ordini entro (a, b) e indichiamo con M_2 il massimo del modulo di $\varphi''(x)$ in questo intervallo.

Mediante una semplice integrazione per parti, tenendo presenti le note proprietà dei polinomi di Legendre, ricaviamo

$$\left|\varrho_m(x)\right| < \frac{M_2}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2m+1}}. \tag{11}$$

Sia $f(x)$ una funzione continua nell'intervallo $(-1, +1)$, cioè

$$|f(x+\delta) - f(x)| < \varepsilon'$$

δ essendo sufficientemente piccolo.

Poniamo

$$\varphi(x) = \frac{1}{h^2}\int_x^{x+h} d\xi \int_\xi^{\xi+h} f(z)\, dz, \tag{12}$$

dove h è un numero positivo.

In questo caso, h essendo convenientemente scelto, avremo in virtù di (11)

$$M_2 = 2\frac{\varepsilon'}{h^2},$$

$$\left|\varrho_m(x)\right| = \left|\varphi(x) - \sum_{k=0}^{m} \frac{2k+1}{2} B_k X_k(x)\right| < \sqrt{2}\,\frac{\varepsilon'}{h^2}\frac{1}{\sqrt{2m+1}}. \tag{13}$$

5. Applichiamo la formula (7) alle funzioni $f(x)$ e $\varphi(x)$, legate dalla relazione (12), e poniamo

$$P_m(x) = \sum_{k=0}^{m} \frac{2k+1}{2} B_k X_k(x).$$

Otteniamo, tenendo conto di (13) e (4),

$$(14) \qquad \left|R_n\right| < (Q\sqrt{2} + A) \frac{\varepsilon'}{h^2 \sqrt{2m+1}} + (Q + A)\, max\, |\varphi(x) - f(x)|,$$

dove

$$Q = \int_{-1}^{+1} p(x)\, dx.$$

Il numero h può sempre essere scelto così piccolo che si abbia

$$(Q + A)\, max\, |\varphi(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

e poi i numeri n ed $m < 2n - 1$ così grandi che si otterrà

$$(Q\sqrt{2} + A) \frac{\varepsilon'}{h^2 \sqrt{2m+1}} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Dalle (14) si deduce allora

$$(15) \qquad |R_n| < \varepsilon \qquad \text{per } n \text{ sufficientemente grande.}$$

Abbiamo preso, per semplicità di scrittura, l'intervallo $(-1, +1)$, ma è ben evidente che la disuguaglianza (15) vale per qualsiasi intervallo (a, b).

Così otteniamo il teorema:

Teorema I. — *Ogni formula di quadratura meccanica, i cui coefficienti* A_k *sono subordinati ad una condizione* (4), *converge per qualsivoglia funzione* $f(x)$ *continua nel dato intervallo* (a, b).

6. Dividiamo l'intervallo (a, b) in n parti ed indichiamo con δ_1 la somma delle lunghezze di tali intervalli, ognuno dei quali contiene almeno un punto corrispondente alle ascisse a_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$; con δ_2 la somma delle lunghezze degli intervalli, ciascuno dei quali non contiene alcuno dei punti sopradetti.

Applicando il teorema I alla funzione continua eguale a zero in tutti gli intervalli del primo gruppo e diversa da zero e positiva in ogni intervallo del secondo gruppo, si deduce senza difficoltà il seguente lemma:

Lemma I. — *Per ogni formula di quadratura meccanica a coefficienti positivi la somma delle lunghezze* δ_2 *degli intervalli, ognuno dei quali non contiene alcun punto corrispondente alle ascisse* a_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$,

può essere resa minore del numero ε arbitrariamente scelto per n abbastanza grande, cioè

$$\delta_2 < \varepsilon \qquad per \qquad n \geqq n_0 ,$$

dove n_0 è un numero intero convenientemente scelto.

7. Sia (α , β) un qualsiasi intervallo compreso nel dato intervallo (a , b). Siano

$$(16) \qquad a' , a'' , \ldots , a^{(s)}$$

quantità di a_k corrispondenti all'intervallo (α , β) e disposte nell'ordine crescente dei loro valori numerici. Applichiamo il teorema I ed il lemma I testè dimostrato alla funzione continua $f(x)$ subordinata alle condizioni

$$f(x) = 0 \qquad \text{per} \qquad \begin{matrix} a \leqq x \leqq \alpha , \\ \beta \leqq x \leqq b \end{matrix}$$

e

$$f(x) = 1 \qquad \text{per} \qquad a + h \leqq x \leqq \beta - h ,$$

dove h è un valore arbitrariamente piccolo, minore della minima delle differenze $(a' - \alpha) , (\beta - a^{(s)})$.

Otteniamo il seguente lemma:

Lemma II. — *Per ogni formula di quadratura meccanica a coefficienti positivi si può, avendo arbitrariamente dato il numero positivo ε, trovare un numero intero n_0 così grande che si abbia*

$$\sum A_k = \int_\alpha^\beta p(x)\, dx + \varepsilon_n ,$$

dove la somma si estende a tutti i coefficienti A_k corrispondenti ai numeri (16), ε_n essendo un valore subordinato alla diseguaglianza

$$|\varepsilon_n| < \varepsilon \qquad per \qquad n \geqq n_0 .$$

8. Sia $f(x)$ una qualsivoglia funzione di x integrabile nell' intervallo (a , b).

Dividiamo questo intervallo in q intervalli parziali δ_i $(i = 1 , 2 , \ldots , q)$.

Siano μ_i e p_i valori qualisivogliano delle funzioni $f(x)$ e $p(x)$ presi ad arbitrio nell'intervallo δ_i.

Poichè le funzioni $f(x)$ e $p(x)$ sono integrabili nell'intervallo (a , b), si avrà, per q sufficientemente grande,

$$(17) \qquad \left| \int_a^b p(x) f(x)\, dx - \sum_{i=1}^{q} \mu_i p_i \delta_i \right| < \frac{\varepsilon'}{2} ,$$

dove ε' è un numero positivo dato ad arbitrio.

Preso q nel modo indicato, assumiamo un numero ε tale che

$$\text{(18)} \qquad \mathrm{M} q\, \varepsilon < \frac{\varepsilon'}{2},$$

M essendo il massimo di $|f(x)|$ nell'intervallo (a, b).

In virtù del lemma II si potrà trovare un numero $n_0 > q$ tale che si abbia per ogni intervallo δ_i,

$$\text{(19)} \qquad \sum_i \mathrm{A}_i = \int_{\delta_i} p(x)\, dx + \varepsilon_n^{(i)} = p_i\, \delta_i + \varepsilon_n^{(i)},$$

dove

$$\text{(20)} \qquad |\varepsilon_n^{(i)}| < \varepsilon \qquad \text{per} \qquad n \geqq n_0 .$$

9. Dividiamo l'intervallo (a, b) in $n \geqq n_0 > q$ intervalli parziali e sia m_i il numero di questi intervalli compresi in δ_i.

La somma del secondo membro della formula (3) può scriversi sotto la forma

$$\sum_{k=1}^{n} \mathrm{A}_k f(a_k) = \sum_{i=1}^{q} \sum_i \mathrm{A}_k f(a_k) .$$

Ora, in forza di (18),

$$\sum_i \mathrm{A}_k f(a_k) = \mu_i \sum_i \mathrm{A}_k = \mu_i\, p_i\, \delta_i + \mu_i\, \varepsilon_n^{(i)} .$$

Per conseguenza

$$\sum_{k=1}^{n} \mathrm{A}_k f(a_k) = \sum_{i=1}^{q} \mu_i\, p_i\, \delta_i + \sum_{i=1}^{q} \mu_i\, \varepsilon_n^{(i)}$$

e poichè in virtù di (19) e (20),

$$\left| \sum_{i=1}^{q} \mu_i\, \varepsilon_n^{(i)} \right| < \mathrm{M} q\, \varepsilon < \frac{\varepsilon'}{2},$$

si ottiene

$$\left| \sum_{i=1}^{n} \mathrm{A}_k f(a_k) - \sum_{i=1}^{q} \mu_i\, p_i\, \delta_i \right| < \frac{\varepsilon'}{2} .$$

Confrontando questa diseguaglianza con (17) deduciamo

$$\left| \int_a^b p(x)\, f(x)\, dx - \sum_{k=1}^{n} \mathrm{A}_k f(a_k) \right| < \varepsilon'$$

n essendo sufficientemente grande.

Ne risulta il teorema:

Teorema II. — *Per ogni formula di quadratura meccanica a coefficienti positivi la somma*

$$\sum_{k=1}^{n} A_k f(a_k)$$

tende a

$$\int_a^b p(x) f(x) dx$$

al crescere indefinito di n, in altre parole, ogni formula di quadratura meccanica a coefficienti positivi converge per qualesivoglia funzione $f(x)$ integrabile nel dato intervallo.

10. Noterò a questo proposito che il n. 4 comprende una semplicissima dimostrazione del teorema di Weierstrass sull'approssimazione delle funzioni continue per mezzo di polinomi.

Infatti, dato ad arbitrio ε' e scelto convenientemente n, otteniamo la diseguaglianza (13) che vale per ogni valore di m.

Essendo i numeri ε' e h fissati nel modo indicato, si avrà nello stesso tempo

$$|\varphi(x) - f(x)| < \varepsilon' . \tag{21}$$

Ciò posto, prendiamo l'intero arbitrario m tale che si abbia

$$\frac{\sqrt{2}}{h^2 \sqrt{2m+1}} < 1 .$$

La diseguaglianza (13) diviene

$$|\varphi(x) - P_m(x)| < \varepsilon' , \tag{22}$$

dove

$$P_m(x) = \sum_{k=0}^{m} \frac{2k+1}{2} B_k X_k(x)$$

è un polinomio di grado m.

Le diseguaglianze (21) e (22) conducono alla seguente

$$|f(x) - P_m(x)| < 2\varepsilon' ,$$

che dimostra il teorema di Weierstrass.