ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE

DEI LINCEI

ANNO CCCXX

1923

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXXII.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1923

Geometria. — *Le geometrie di Sophus Lie e le geometrie non pitagoriche in generale.* Nota di ADRIANO MACCONE, presentata dal Corrispondente G. FUBINI.

Nelle geometrie fin qui considerate viene studiata una forma quadratica differenziale definita positiva

$$\sum_{i,k}^{1-n} a_{ik}\, dx_i\, dx_k$$

che si assume (per naturale generalizzazione del teorema di Pitagora) come quadrato dell'elemento lineare ds.

Sophus Lie, abbandonando il concetto di elemento lineare, ha studiato alcune geometrie che non rientrano nel tipo precedente, ammettendo che due punti abbiano un solo invariante: la loro distanza, e che più punti abbiano un solo invariante, le mutue distanze due a due.

Nel presente lavoro mi propongo di abbracciare sotto un sol punto di vista le une e le altre geometrie [1], senza ammettere la forma quadratica per l'elemento lineare, ma partendo però sempre dalla concezione di elemento lineare.

Assumo come elemento lineare una espressione del tipo:

$$(1) \qquad ds = dx_1\, \varphi\left(x_1, x_2, x_3, \ldots x_n, \frac{dx_2}{dx_1}, \frac{dx_3}{dx_1} \ldots \frac{dx_n}{dx_1}\right)$$

e cerco quando è che ammette un gruppo di movimenti.

Si devono considerare a parte gli elementi lineari che dico *degeneri*, del tipo:

$$ds = dx_1\, \varphi\left(x_1, x_2, \ldots x_n, \frac{dx_2}{dx_1}, \ldots \frac{dx_{i-1}}{dx_1}, \frac{dx_{i+1}}{dx_1} \ldots \frac{dx_n}{dx_1}\right)$$

$$i = 2, 3 \ldots n$$

generalizzazione di quelli a discriminante nullo.

Per gli altri osservo che ogni trasformazione infinitesima

$$\xi_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \xi_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \ldots + \xi_n \frac{\partial}{\partial x_n}$$

[1] Limitandomi alle geometrie piane.

ampliata con la introduzione delle variabili

$$z_1 = \frac{dx_2}{dx_1}, z_2 = \frac{dx_3}{dx_1}, \ldots z_{n-1} = \frac{dx_n}{dx_1}$$

diviene del tipo:

$$\xi_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \xi_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \ldots + \xi_n \frac{\partial}{\partial x_n} + \eta_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + \eta_2 \frac{\partial}{\partial z_2} + \ldots \eta_{n-1} \frac{\partial}{\partial z_{n-1}}$$

dove è

$$\eta_1 = \frac{d\xi_2}{dx_1} - \frac{dx_2}{dx_1}\frac{d\xi_1}{dx_1} \ldots \eta_{n-1} = \frac{d\xi_n}{dx_1} - \frac{dx_n}{dx_1}\frac{d\xi_1}{dx_1}.$$

Chiamando con ε un parametro infinitesimo ed uguagliando a zero la variazione della forma differenziale (I) si trova, dopo aver diviso per dx_1:

$$\varphi(\xi_{1x_1} + z_1 \xi_{1x_2} + \ldots + z_{n-1} \xi_{1x_n}) + \varphi_{x_1}\xi_1 + \varphi_{x_2}\xi_2 + \ldots + \varphi_{x_n}\xi_n +$$
$$+ \varphi_{z_1}\left[(\xi_{2x_1} + z_1 \xi_{2x_2} + \ldots) - z_1(\xi_{1x_1} + \xi_{1x_2} z_1 + \xi_{1x_3} z_2 + \ldots)\right] + \ldots$$
$$\ldots + \varphi_{z_{n-1}}\left[(\xi_{nx_1} + \xi_{nx_2} z_1 + \ldots) - z_{n-1}(\xi_{1x_1} + \xi_{1x_2} z_1 + \ldots)\right] = 0$$

dove con ξ_{ix_j}, φ_{z_k} indico le derivate parziali delle ξ_i rispetto alle x_j e della φ rispetto a z_k. Equazione questa che può chiamarsi di *Killing* generalizzata.

Premettiamo il lemma di Bianchi generalizzato:

Una geometria, se non è degenere, non può ammettere due trasformazioni infinitesime nelle x_i proporzionali con le stesse traiettorie.

Con un cambiamento di coordinate una trasformazione infinitesima può ridursi a $\frac{\partial}{\partial x_2}$ talchè $\xi_2 = 1, \xi_1 = \xi_3 = \ldots = \xi_n = 0$. Se l'equazione di Killing generalizzata è soddisfatta oltrechè da $\xi_2 = 1, \xi_1 = \ldots = \xi_n = 0$, anche da $\varrho\xi_2$ dove ϱ non è costante, deve essere:

$$\varphi_{z_1}(\varrho_{x_1} + \varrho_{x_2} z_1 + \ldots \varrho_{x_n} z_{n-1}) = 0$$

da cui $\varphi_{z_1} = 0$, e allora l'elemento lineare è degenere.

Se limitiamo ora la ricerca alle geometrie piane, abbiamo:

L'elemento lineare degenere può ridursi ad uno dei due tipi:

1°) $ds = dx\,\varphi(x)$, che, posto $X = \int \varphi(x)\,dx$ può ridursi alla forma dX;

2°) $ds = dx\,\varphi(x, y)$, che, con la trasformazione $x = X$, $\varphi(x, y) = Y^2$ può ridursi a $Y^2\,dX$.

Allora la più generale trasformazione finita che conserva l'elemento lineare è del tipo:

$$X' = F(X) \quad ; \quad Y' = \frac{Y}{\sqrt{F'(x)}}$$

con F segno di funzione arbitraria. Una delle geometrie di Lie (*Theorie der Transformationsgruppen*, vol. III, pag. 436) è degenere e può ridursi a questo secondo tipo con passaggio a coordinate polari; il gruppo studiato dal Lie è il gruppo *lineare omogeneo speciale* a 3 parametri, ed è un sottogruppo di quello a infiniti parametri da noi considerato.

Per trovare ora tutte le geometrie non degeneri con un gruppo di movimenti, poichè un gruppo con più di tre parametri, possiede un sottogruppo a tre parametri, così cominciamo con lo studiare quelle delle geometrie che ammettono un gruppo a uno, a due, a tre parametri e ci serviremo all'uopo della tabella di Lie (opera succitata, vol. III, pag. 57) che dà un tipo canonico a cui si riducono le trasformazioni infinitesime generatrici di tali gruppi, trascurando quelli con due trasformazioni infinitesime proporzionali.

Tralasciando di riprodurre qui i risultati a cui portano i gruppi ad uno e a due parametri della citata tabella, non suscettibili di semplice interpretazione, passiamo ai gruppi a tre parametri:

Il gruppo (pag. 57, § 14, n. 3):

$$(1) \qquad \boxed{q\,,\,p\,,\,xp + cy\,q}$$

fornisce per sostituzione nell'equazione di Killing tre equazioni che, integrate, danno $\varphi = z^{\frac{1}{1-c}}$ a meno di un fattore costante; e per l'elemento lineare avremo:

$$ds = dx\left(\frac{dy}{dx}\right)^{\frac{1}{1-c}}$$

che può chiamarsi elemento lineare della geometria Euclidea generalizzato, poichè per $c = -1$ diviene $ds = \sqrt{dx\,dy}$; e a cui si riduce ovviamente il primo invariante di Lie [vol. III, pag. 436].

Definiamo ora per questa geometria l'invariante di due direzioni uscenti da un punto (angolo) e troviamone una rappresentazione sul piano euclideo.

Considero il gruppo prolungato del gruppo dato le cui trasformazioni infinitesime generatrici sono le trasformazioni del gruppo prolungate due volte mediante l'introduzione delle variabili $z = \frac{dy}{dx}$, $Z = \frac{dY}{dX}$, e integro il sistema di equazioni alle derivate parziali che si ottiene uguagliando a zero tali trasformazioni. Si trova:

$$p = 0\,;\, q = 0\,;\, xp + cy\,q + (c-1)\,z\frac{\partial}{\partial z} + (c-1)\,Z\frac{\partial}{\partial Z} = 0\,.$$

Integrando si ha: $\log\frac{z}{Z} = \text{cost.}$, e l'invariante cercato è appunto $\log\frac{z}{Z}$ che gode della proprietà additiva.

Le geodetiche sono linee rette.

Il gruppo (pag. 57; n. 3, § 14):

$$(2) \qquad \boxed{q\,,p\,,xp+(x+y)\,q}$$

fornisce per sostituzione nell'equazione di Killing tre equazioni che, integrate, danno $\varphi = e^{-z}$, onde, a meno di una costante, abbiamo per ds la forma

$$ds = dx\, e^{-\frac{dy}{dx}}$$

che è il quarto invariante di Lie (vol. III, pag. 436).

Volendo definire l'invariante di due direzioni per una tale geometria, dovremo, operando come precedentemente, integrare il sistema:

$$q=0\,,p=0\,,xp+(x+y)\,q+\frac{\partial}{\partial z}+\frac{\partial}{\partial Z}=0$$

e l'invariante cercato è $z - Z$ di cui è evidente l'interpretazione sul piano euclideo. Esso è additivo. Le geodetiche sono linee rette: $y = mx + n$

La distanza di due punti in termini finiti è data da:

$$e^{-m}\int_{x_0}^{x_1} dx = e^{-m}(x_1 - x_0)\,.$$

Il gruppo (pag. 57, n. 3)

$$\boxed{p\,,xp+yq\,,x^2p+(2xy+y^2)\,q}$$

fornisce per sostituzione nell'equazione di Killing tre equazioni

$$\varphi_x = 0 \quad , \quad \varphi + y\,\varphi_y = 0 \quad , \quad y\,\varphi_y + 2\,\varphi_z\,(1+1)\,z = 0$$

da cui integrando:

$$\varphi = \frac{\sqrt{1+z}}{y}$$

e quindi abbiamo per ds

$$ds = dx\,\frac{\sqrt{1+\frac{dy}{dx}}}{y} = \sqrt{\frac{dx^2+dx\,dy}{y^2}}$$

che è l'elemento lineare della geometria non euclidea. In Sophus Lie è dato nella forma geodetica (pag. 436, vol. III). Si può domandare ora, se il gruppo dei movimenti può avere più di tre parametri. Quantunque sia

geometricamente intuitivo che ciò non può essere, fissiamo un gruppo a tre parametri entro a questo gruppo, diamo a ds la forma nota corrispondente e, sostituitala nell'equazione di Killing, risolviamo questa rispetto a ξ e η, trasformazioni infinitesime generatrici.

Per il gruppo (1) abbiamo, posto $\frac{1}{1-c} = m$, e sostituendo a φ, z^m:

$$z^m\left(\frac{\partial\xi}{\partial x} + m\frac{\partial\eta}{\partial y} - m\frac{\partial\xi}{\partial x}\right) + mz^{m-1}\frac{\partial\eta}{\partial x} + z\frac{\partial\xi}{\partial y} - \frac{\partial\xi}{\partial y}z^2 = 0$$

da cui:

$$\frac{\partial\xi}{\partial x} + m\frac{\partial\eta}{\partial y} - m\frac{\partial\xi}{\partial x} + m\,z^{-1}\frac{\partial\eta}{\partial x} + z^{1-m}\frac{\partial\xi}{\partial y} - z^{2-m}\frac{\partial\xi}{\partial y} = 0$$

e se m è diverso da 2 (¹), si ha ovviamente:

$$\frac{\partial\xi}{\partial x}(m-1) = m\frac{\partial\eta}{\partial y}\ ,\quad \frac{\partial\xi}{\partial y} = 0\ ,\quad \frac{\partial\eta}{\partial x} = 0$$

onde

$$\xi = \mathrm{K}x + \mathrm{K}'\ ,\qquad \eta = \mathrm{K}cy + \mathrm{K}''$$

cioè il gruppo ha tre parametri. A identico risultato si perviene negli altri casi.

Termino dando un quadro dei possibili tipi di ds trovati:

1° degeneri:

$$ds = d\mathrm{X}\ ,\qquad ds = \mathrm{Y}^2\,d\mathrm{X}$$

2° non degeneri:

$$ds = dx\left(\frac{dy}{dx}\right)^{\frac{1}{1-c}}\ ;\qquad ds = dx\,e^{-\frac{dv}{dx}}$$

$$ds = \sqrt{\frac{dx^2 + dx\,dy}{y^2}}.$$

(¹) Se $m = 2$ si perviene allo stesso risultato. Se $m = 1$, ds è degenere.