ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE
DEI LINCEI

ANNO CCCXX

1923

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXXII.

1° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1923

Geometria. — *Le congruenze W a falde focali rigate e il teorema di Segre. Le superficie isotermo-asintotiche e le loro trasformazioni.* Nota del Corrispondente GUIDO FUBINI.

1. [1] Sia una rigata S in cui le $u=$ cost. sono generatrici rettilinee. Poichè le asintotiche curvilinee segnano su di queste dei gruppi proiettivi, potremo supporre la superficie definita ponendo per le coordinate omogenee di un suo punto

$$x = x_1(u) + v x_2(u) \qquad (x_i \text{ funz. di } u) \tag{26}$$

e analoghe per le altre 3 coordinate del punto stesso in guisa che le $v=$ cost. siano asintotiche. Ciò si può anche vedere così: Siano $x = x_1(u)$ ed $x = X(u)$ due asintotiche di S, in guisa che a uguali valori di u corrispondano punti di una stessa generatrice. In ogni altro punto di S varranno formole del tipo: $x = x_1(u) + w\,X(u)$ ove w è un altro parametro. Se $w = w(u)$ è l'equazione di una terza assintotica di S varranno le (26) ove

$$v = \frac{w}{w(u)}\ , \quad x_2(u) = w(u)\,X(u)$$

e le $v = 0, 1, \infty$ definiranno 3 assintotiche di S. L'osservazione precedente, o il calcolo effettivo dei determinanti $(x\,, x_u\,, x_v\,, x_{uu})$ ed $(x\,, x_u\,, x_v\,, x_{vv})$, che risultano identicamente nulli, provano che le $v=$ cost. sono tutte asintotiche. Posto

$$H^2 = (x\,, x_u\,, x_v\,, x_{uv}) = \left(x_1\,, \frac{dx_1}{du}\,, x_2\,, \frac{dx_2}{du}\right) \tag{1-bis}$$

che è *indipendente* da v, varranno le:

$$x_{vv} = 0 \qquad x_{uu} = \frac{\partial \log H}{\partial u}\, x_u + \beta\, x_v + px \tag{2-bis}$$

ossia $q = \gamma = 0$. Le condizioni (6) di integrabilità (Not. cit.) danno:

$$p''_{vv} = 0\,, \beta_{vv} + 2p_v = 0 \text{ ossia}$$

$$p = p_1 + v\,p_2 \qquad \beta = -p_2\, v_1^2 + p_3\, v + p_4 \tag{27}$$

$$(p_4 = \text{funzioni della sola } u).$$

[1] Questa Nota usa le notazioni delle due precedenti:
La teoria proiettiva delle congruenze W;
Relazione tra le due falde focali di una congruenza W.
(Questi Rendiconti, pag. 301).

La $\beta = 0$ definisce la linea flecnodale. Qui non si possono usare coordinate normali; *moltiplicando però le x_i per una stessa funzione di u* (cosa lecita trattandosi di coordinate omogenee) *potremmo rendere $p_1 = 0$, o introdurre altre simili semplificazioni. Altre semplificazioni si ottengono anche mutando v in $v +$ cost. o trasf. analoghe.*

Si voglia cercare una congruenza W di cui S sia prima falda focale, tale che sulla seconda falda le $v =$ cost. siano rette, cosicchè $\beta_1 = 0$. Sarà per (II)

$$\beta = -\frac{B\,N_u}{A\,N} \quad \text{ossia} \quad \frac{N_u}{N} = -\frac{A\beta}{B} = \frac{B_u}{B} \quad \text{cioè} \quad N = WB,$$

ove W è funzione della sola v. Così pure la $A_v = -B\gamma$ dà, essendo $\gamma = 0$, che A è funzione della sola u. La (20) diventa:

$$N_{uv} + \frac{\beta A}{B} N_v = 0 \quad \text{ossia} \quad W' B_u + W B_{uv} - \frac{B_u}{B}(W' B + W B_v) = 0$$

ossia $B_{uv} = \dfrac{B_u B_v}{B}$ (non può essere $W = 0$, perchè $N \neq 0$), ossia $B = UV$ dove U dipende dalla sola u, V dalla v. Potremo dunque porre

$$A = -\frac{B_u}{\beta} = -\frac{U' V}{\beta}.$$

Non potendo A essere nullo, e quindi neanche U', ma dovendo A essere funzione della sola u come U' dovrà $\dfrac{V}{\beta}$ essere una funzione della sola u; ed essendo β un polinomio di 2° grado nella v, sarà:

$$\beta = F(u)\,(a v^2 + b v + c) \qquad p = p_1 - a F(u)\, v$$

$$V = k\,(a v^2 + b v + c) \qquad (a, b, c, k = \text{cost.})$$

$$A = -\frac{k' U'}{F(u)} \quad , \quad B = UV.$$

Ecco integrate nel modo più semplice le equazioni del nostro problema. Basta calcolare N con le (I) (loc. cit.) per trovare che N è funzione della sola u e quindi per (II) che $\gamma + \gamma_1 = 0$, ossia, essendo $\gamma = 0$, che $\gamma_1 = 0$. Perciò, essendo $\gamma_1 = \beta_1 = 0$, la S_1 è una quadrica.

Si ha dunque il teorema di Segre:

Se una congruenza W ha falde focali rigate, e alle asintotiche curve della prima corrispondono le generatrici della seconda falda, allora la seconda falda è doppiamente rigata ossia è una quadrica.

In altre parole:

Si trova la più generale congruenza W a falde focali rigate studiando il caso che le generatrici delle due falde si corrispondano: che sia *cioè* $\gamma = \gamma_1 = 0$, *ossia che* N *ed* A *siano entrambe funzioni della sola* n. Posto $q_i = \int p_i \,A\, du$, sarà:

$$\text{(28)} \quad B_u = A(p_2 v^2 - p_3 v - p_4) \quad B = \varphi(v) + q_2 v^2 - q_3 v - q_4 \quad (q'_i = p_i A)$$

ove φ è funzione di v. Basterà per risolvere il nostro problema, determinare la $A(u)$ e la $\varphi(v)$ (uniche incognite) in guisa che N sia funzione della sola u. Calcolando μ, λ, N con le (11), (12), (I) (loc. cit.) si trova che gli unici termini di N, i quali contengono v, sono i seguenti:

$$-\varphi'^2 + 2\varphi\varphi'' + 2q_3(\varphi' - v\varphi'') + 2q_2(v^2\varphi'' - 2v\varphi' + 2\varphi)$$

la quale espressione deve risultare indipendente dalla v. Derivando rispetto v si trova

$$\varphi'''(\varphi - vq_3 + v^2 q_2) = 0.$$

Se il secondo fattore fosse nullo, allora per $v = 0$, si trova $\varphi = 0$. Se così non è, è nullo il primo fattore $\varphi''' = 0$ (caso che include il precedente). *Dunque* A *si può scegliere ad arbitrio come funzione di* u, *la* $\varphi(v)$ *è un polinomio di secondo grado in* v. *E, con sole quadrature, quelle necessarie a determinare le* q_i, *si hanno tutte le congruenze* W *a falde focali rigate, quando ne sia data la prima falda focale rigata* (che si può scegliere arbitrariamente).

2. Quando mai sulle due falde focali di una congruenza si corrispondono le linee di Darboux e Segre? [1] In tal caso si devono corrispondere le asintotiche (Hessiano di tali linee). La congruenza deve essere W. La questione è ridotta a vedere quando per una congruenza W può essere

$$\beta : \gamma = \beta_1 : \gamma_1 \quad \text{ossia per (II)} \quad BS : -AT = \beta : \gamma$$

ossia per (18), usando coordinate *non omogenee*

$$\text{(18}^{-bis}\text{)} \quad \left\{ \begin{aligned} &\mu_{uu} - \frac{H_u}{H}\mu_u + \beta\mu_v - P\mu = \varrho\frac{\beta}{B} \\ &\mu_{vv} - \frac{H_{vv}}{H}\mu_v + \gamma\mu_v - Q\mu = -\varrho\frac{\gamma}{A} \end{aligned} \right\} \quad \varrho = \text{fattore di proporzionalità}$$

insieme alla (15)

$$\text{(15}^{-bis}\text{)} \qquad \mu_{uv} - \left(\frac{\partial^2 \log H}{\partial u\, \partial v} + \beta\gamma\right)\mu = 0.$$

[1] Le trasformazioni di cui qui si tratta furono da me trovate nei miei lavori citati nelle Note precedenti, ricordate al § 1. Però il teorema di permutabilità per tali trasformazioni fu dato poi per la prima volta per via metrica dalla sig.^{na} Elisabetta Ragazzi. (Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, tomo 45, p. 205).

Inoltre si hanno le (10) , (11) , (12) , (14)

$$(10^{-ter}) \qquad A_v = -B\gamma \qquad\qquad B_u = -A\beta$$

$$(11^{-bis}) \qquad 2A_u = -2A\frac{H_u}{H} - (\mu + \lambda) \qquad 2B_v = -2B\frac{H_v}{H} + \lambda - \mu$$

$$(14^{-bis}) \qquad \begin{cases} \lambda_v = -\mu_v - 2A(\log H)_{uv} + \cdots \\ \lambda_u = \mu_u + 2B(\log H)_{uv} + \cdots \end{cases}$$

Le condizioni di integrabilità delle (10), (11) si riducono alle (14); le condizioni d'integrabilità di queste alla (15). Basterà studiare le condizioni d'integrabilità delle (18) e (15).

Uguagliando i valori di μ_{uvv}, μ_{uuv}, ricordando le altre equazioni e le (6), si trovano come condizioni di integrabilità la:

$$\varrho\frac{\beta\gamma}{A} + \left(\frac{\varrho\beta}{B}\right)_v = 0$$

ossia:

$$\frac{\varrho\beta}{BA} = U \quad \text{e la:} \quad \frac{\varrho\gamma}{AB} = V,$$

ove U è funzione di u, V di v. Dividendo membro a membro si trova: $\dfrac{\partial^2 \log \frac{\beta}{\gamma}}{\partial u\, \partial v} = 0$, cosicchè con un cambiamento di variabili si può ottenere che $\beta = \gamma$ (superf. isot.-asintotiche).

Soltanto le superf. isotermo-asintotiche (quelle, per cui le linee di Wilczynski formano un sistema coniugato) *sono falde focali di una congruenza tale che sulle due falde si corrispondono le linee di Darboux-Segre. Viceversa ogni superficie isot.-asint. è falda focale di infinite di tali congruenze ottenute integrando il sistema delle* (18), (15), (10), (11), (14) *ove si ponga*

$$\varrho\frac{\beta}{B} = kA \quad \text{e} \quad \varrho\frac{\gamma}{A} = kB \qquad (k = \text{cost.}).$$

(Infatti, essendo $\beta = \gamma$, dovendo essere $\dfrac{\varrho\beta}{BA} = \dfrac{\varrho\gamma}{BA}$ funzione sia della sola u che della sola v, sarà $\varrho\beta = kAB$ con $k = \text{cost.}$).

Varranno perciò le $S = kA$, $T = -kB$ e quindi per (II):

$$(29) \qquad N_u = 2kA^2 \qquad N_v = 2kB^2.$$

Siano ora date due di tali congruenze corrispondenti ai valori $A_i, B_i (i = 1, 2)$. Sarà per (22)

$$\frac{\partial N_{12}}{\partial u} = 2(k_1 + k_2) A_{12}.$$

Dalla (23) si deduce immediatamente:

$$\omega = \frac{k_1}{k_1 + k_2} N_{12} + c \qquad (c = \text{cost.}). \tag{30}$$

La ∞^1 *superficie* S_{12} *del teorema di permutabilità del Bianchi, corrispondenti a congruenze* W *aventi per falde focali le superficie isot.-asint.* S ed S_1, *oppure* S *ed* S_2 *si ottengono senza quadrature in termini finiti* (se $k_1 + k_2 \neq 0$; invece il caso $k_1 = -k_2$, si dovrebbe studiare a parte.

Vediamo se tra queste superficie S_{12} ve n'è ancora una isotermo-asintotica. In tal caso la corrispondente congruenza avente S_1 ed S_{12} per falde focali dovrà essere tale che per essa valgano le equazioni corrispondenti alle (29); cioè dovrà essere:

$$\frac{\partial N_1^1}{\partial u} = h\, A_1^{12} \qquad \frac{\partial N_1^1}{\partial v} = h\, B_1^{12} \qquad (h = \text{cost.}).$$

Ricordando (25^{-ter}), ove alla N_{12} si sostituisca il valore di ω dato da (30), si riconosce facilmente che queste equazioni sono soddisfatte, appena si supponga nulla la costante c delle (30).

Quindi, se S_1, S_2 *sono superf. isot.-asint. trasformate* W *di una stessa superf. isot.-asint.* S, *esiste una e una sola quarta superf. isot.-asint., determinabile in termini finiti, che è trasform.* W *sia di* S_1 *che di* S_2. Ne segue che anche in questo caso vale il teor. di Bianchi *che, se di una superf. isot.-asint. si conoscono tutte le superf. isot.-asint. trasformate* W, *le ulteriori applicazioni delle trasformazioni* W *si esplicitano in termini finiti.*

Oss. Nella precedente dimostr. è trascurato il caso della composizione di 2 congruenze W per cui $k_1 + k_2 = 0$.