ATTI
DELLA
REALE ACCADEMIA NAZIONALE
DEI LINCEI

ANNO CCCXX

1923

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXXII.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1923

NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sulla rappresentazione analitica in forma finita delle funzioni i cui diagrammi sono costituiti da uno o più archi di curve di natura qualsiasi periodicamente ripetuti.* Nota dell'ing. Letterio Labocetta, presentata dal Corrispondente G. A. Crocco.

Le funzioni periodiche il cui diagramma è ottenuto con la ripetizione periodica di un arco di curva, oppure, più generalmente, è costituito da un certo numero di archi appartenenti a curve che possono anche essere tutte fra loro diverse, i quali archi vengono ripetuti in ogni periodo, sono state rappresentate analiticamente, ricorrendo allo sviluppo in serie di Fourier. In questa Nota mi progongo di mostrare come sia possibile dare di esse una espressione analitica in forma finita, sia che il periodo comprenda un arco soltanto, sia che comprenda più archi, e sia la funzione semplicemente « pulsante » oppure « alternata ».

1°. — Data una funzione qualsiasi $y = f(x)$, essa si rende periodica ponendo $a \operatorname{Fr} \frac{x}{a}$ invece di x, scrivendo cioè

$$y = f\left(a \operatorname{Fr} \frac{x}{a}\right) \tag{1}$$

dove con il simbolo $\operatorname{Fr} \frac{x}{a}$ si è indicata la funzione « frazione » di $\frac{x}{a}$, cioè la parte frazionaria di $\frac{x}{a}$, ed a indica quindi l'ampiezza del periodo, poichè la quantità $a \operatorname{Fr} \frac{x}{a}$ varia periodicamente da 0 ad a.

Si avrebbe una identica successione di archi, rivolti però dalla parte opposta, scrivendo

$$y = f\left(a \operatorname{Cm} \frac{x}{a}\right) \tag{2}$$

dove il simbolo $\operatorname{Cm} \frac{x}{a}$ indica la funzione « complemento » di $\frac{x}{a}$, cioè la frazione che bisogna aggiungere ad $\frac{x}{a}$ per formare l'intero immediatamente superiore. Infatti il periodo è a come prima, ma la quantità $a \operatorname{Cm} \frac{x}{a}$ varia periodicamente fra a e zero.

Così data l'equazione della parabola

(3) $$y = \frac{4b}{a^2}(-x^2 + ax)$$

il cui asse ha per ascissa $\frac{1}{2}a$ ed il cui vertice ha per ordinata b, l'equazione

(4) $$y = 4b\left[-\left(\mathrm{Fr}\,\frac{x}{a}\right)^2 + \mathrm{Fr}\,\frac{x}{a}\right]$$

rappresenterà una successione di archi di questa parabola i cui vertici stanno tutti sulla linea $y = b$ e che terminano tutti coi loro estremi sull' asse x nei punti che hanno per ascissa i multipli di a.

2°. — Per rendere alternata la (4), chè è solo pulsante, basta moltiplicarla per un fattore « alternante » come ad esempio

(5) $$(-1)^{\mathrm{I}\frac{x}{a}}$$

il quale gode la proprietà di avere il valore $+1$ in tutti gli intervalli corrispondenti ai periodi di ordine dispari ed il valore -1 in tutti gli intervalli corrispondenti ai periodi di ordine pari [1]. Si ha così l'equazione

(6) $$y_a = 4b\left[-\left(\mathrm{Fr}\,\frac{x}{a}\right)^2 + \mathrm{Fr}\,\frac{x}{a}\right](-1)^{\mathrm{I}\frac{x}{a}}$$

che rappresenta una « pseudo-sinusoide » parabolica.

3°. — Il fattore alternante può, reciprocamente, essere usato ad operare il raddrizzamento di una funzione periodica alternata. Così scrivendo

(7) $$y = \mathrm{sen}\,x\ \mathrm{sen}\,\pi\left(\frac{1}{2} + \mathrm{I}\,\frac{x}{\pi}\right)$$

si ha la sinusoide raddrizzata.

Questa si può anche direttamente ottenere applicando il metodo esposto nel § 1, alla equazione della sinusoide ordinaria. Infatti ponendo π invece di a nella (1) si ha.

(8) $$y = \mathrm{sen}\,\pi\left[\mathrm{Fr}\,\frac{x}{\pi}\right].$$

[1] Altri fattori godenti la stessa proprietà sono, ad esempio,

$$\mathrm{sen}\,\pi\left(\frac{1}{2} + \mathrm{I}\,\frac{x}{a}\right),\ \cos\pi\,\mathrm{I}\,\frac{x}{a},\ \mathrm{tg}\,\pi\left(\frac{1}{4} + \mathrm{I}\,\frac{x}{a}\right)\ \text{etc.}$$

nelle quali espressioni il simbolo $\mathrm{I}x$ sta ad indicare la funzione « intiero di x » come nella mia precedente Nota. R. C. vol. XXXI, fasc. 12°. Seduta 18 giugno 1922.

Questo metodo è generale per rendere periodica pulsante una funzione periodica alternata. Anzi limitando l'intervallo ad una parte aliquota di π, $a = \frac{\pi}{n}$ per es., e scrivendo cioè

$$y = \operatorname{sen} \frac{\pi}{n} \left[\frac{n-1}{2} + \operatorname{Fr} \frac{nx}{\pi} \right] \tag{9}$$

si ha l'equazione della funzione ottenuta col raddrizzamento delle creste di ampiezza $\frac{\pi}{n}$ di un sistema di n sinusoidi sfasate di $\frac{\pi}{n}$ l'una rispetto all'altra, il vertice della prima cresta avendo $\frac{\pi}{2n}$ per ascissa.

4°. Il diagramma della (9) corrisponde al caso della ripetizione periodica dell'identico arco di una stessa curva. Più generale è il caso di un periodo comprendente n archi appartenenti a n curve diverse

$$y_1 = f_1(x),\ y_2 = f_2(x), \ldots.\ y_n = f_n(x)$$

corrispondenti ad altrettanti intervalli

$$i_1 = a_1,\ i_2 = a_2 - a_1 \ldots..\ i_n = a_n - a_{n-1}\,.$$

Il diagramma complessivo si può considerare risultante dalla combinazione di n diagrammi resi tutti periodici con un comune periodo $a = a_n$.

$$y_1 = f_1\left(a \operatorname{Fr} \frac{x}{a}\right),\ y_2 = f_2\left(a \operatorname{Fr} \frac{x}{a}\right) \ldots.\ y_n = f_n\left(a \operatorname{Fr} \frac{x}{a}\right) \tag{10}$$

di ciascuno dei quali sia in ogni periodo annullata la parte che trovasi fuori dell'intervallo al quale esso corrisponde. Basta perciò moltiplicare ciascuna delle funzioni y_m (10) per una « funzione limitatrice periodica » a due valori $\varphi_m \binom{1}{0}_\pi$ (¹) che sia uguale a $+1$ nell'intervallo m^{mo} di ogni periodo e nulla negli altri intervalli.

Una tale funzione è, ad esempio,

$$\varphi_m \binom{1}{0}_\pi = \operatorname{sgn} 1 \left[\frac{2}{i_m} \Big/ \left(a \operatorname{Fr} \frac{x}{a} - \frac{a_{m-1} + a_m}{2} \right) \right]^2 \tag{11}$$

(¹) Con la lettera π posta a piedi della parentesi che racchiude i due valori della funzione limitatrice si è voluto indicare che si tratta di una funzione periodica. Intorno alla costruzione ed alle proprietà delle « funzioni limitatrici », si vegga la mia precedente Nota già citata.

quindi l'equazione generale del diagramma comprendente n archi in ogni periodo è

$$(12) \qquad y = y_1\,\varphi_1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}_\pi + y_2\,\varphi_2\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}_\pi + \cdots\cdots + y_n\,\varphi_n\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}_\pi .$$

Questa espressione si semplifica nel caso di diagrammi simmetrici o formati di archi di curve della stessa specie. Particolarmente importanti sono fra questi ultimi i diagrammi « poligonali » costituiti cioè da elementi rettilinei.

5°. — Considerando come orizzontale l'asse delle ascisse e come verticale quello delle ordinate, si può dire che un diagramma poligonale comprende:

a) segmenti orizzontali; *b*) segmenti ascendenti verso destra; *c*) segmenti discendenti verso destra; *d*) segmenti verticali.

Una serie di segmenti orizzontali disposti sulla retta $y^1 = d$, ed occupanti l'intervallo m^{mo} del periodo, si ottiene dalla equazione della retta moltiplicando il secondo membro per una funzione limitatrice del tipo della (11), scrivendo cioè

$$(13) \qquad y = d\,\varphi_m\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}_\pi .$$

Si osservi che questa equazione rappresenta non solo i segmenti dell'intervallo m^{mo} sulla retta $y^1 = d$, ma anche i tratti dell'asse delle ascisse corrispondenti ai residui intervalli, e questa osservazione vale anche per le altre due equazioni (14), (19). Poichè però queste equazioni servono soltanto per formare la (12) i segmenti giacenti sull'asse delle x spariscono nel diagramma complessivo. Ma se si volesse proprio la rappresentazione « isolata » di ciascuna serie di segmenti, bisognerebbe servirsi invece di una funzione periodica $\varphi_m\begin{pmatrix}1\\i\end{pmatrix}_\pi$ a due valori, uno reale $+1$ e l'altro immaginario $+i$.

Quanto alle serie di segmenti inclinati, supponendo che ciascuna di esse debba essere compresa in una striscia del piano limitata dalle due rette $y'_i = d_i \; y''_i = d_i + l_i$ poichè le equazioni delle due serie di segmenti estesi a tutto il periodo a sono,

$$(14) \qquad y_i = d_i + l_i\,\mathrm{Fr}\,\frac{x}{a} \qquad y_j = d_j + l_j\,\mathrm{Cm}\,\frac{x}{a} .$$

basterà in ciascuna di queste equazioni aggiungere come fattore al secondo membro una funzione limitatrice (11)

$$(15) \qquad y_i = \left[d_i + l_i\,\mathrm{Fr}\,\frac{x}{a}\right]\varphi_i\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}_\pi \quad y_j = \left[d_j + l_j\,\mathrm{Cm}\,\frac{x}{a}\right]\varphi_j\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}_\pi .$$

Particolare trattamento richiedono i segmenti verticali pei quali l'intervallo si riduce ad un punto alla cui ascissa corrispondono infiniti valori dell'ordinata.

Per la rappresentazione di essi introduciamo da una parte una nuova funzione limitatrice periodica.

$$\varphi_{N0}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}_\pi = \mathrm{I}\,\frac{\mathrm{I}\,|x|}{|x|} \tag{16}$$

la quale, quando si convenga di attribuire ad essa il valore $+1$ nell'origine dove ha la forma indeterminata $\frac{0}{0}$, gode la proprietà di assumere il valore $+1$ per tutti i valori N_0 intieri positivi e negativi, compreso lo zero, della variabile e di assumere invece il valore zero per qualsiasi valore non intiero di essa.

D'altra parte introduciamo pure la nuova funzione

$$y = \mathrm{I}^{-1}\,\mathrm{N} \tag{17}$$

definendola come quel numero y la cui parte intiera ha il valore N, cosicchè scrivendo

$$y = \mathrm{I}^{-1}\,(\mathrm{I}\,x) \tag{18}$$

si intende che y può aver qualsiasi valore compreso fra $\mathrm{I}\,x$ e $1 + \mathrm{I}\,x$, e, ad esempio, per $\mathrm{I}\,x = 0$ ad y corrispondono tutti i valori compresi fra 0 e $+1$.

Ciò posto si scorge che la funzione

$$y = [d + l\,\mathrm{I}^{-1}\,0]\,\mathrm{I}\,\frac{a\,\mathrm{I}\,\frac{|x|}{a}}{|x|} \tag{19}$$

rappresenta una serie di segmenti verticali di lunghezza l alla distanza a l'uno dall'altro, e compresi tutti nella striscia limitata dalle due rette $y = d$, $y = d + l$, ed, insieme con questi segmenti, rappresenta anche l'asse delle x, meno i punti corrispondenti alle ascisse che sono multipli di a.

Nella sua forma più generale perciò una funzione periodica poligonale sarà rappresentata mediante una somma di termini dei tipi (13), (14), (19), il numero di questi termini corrispondendo, al più, al numero dei lati della poligonale costituenti un'onda completa. Se la funzione invece di essere pulsante è alternata, il numero dei detti termini si può ridurre a metà, aggiungendo però alla somma dei termini rimasti un fattore alternante.