ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

ANNO CCCXX

1923

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXXII.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1923

L'etere etilico dell'acido triazolcarbonico così ottenuto, bollito per una mezz'ora con alcool cui sia stata aggiunta un poco di soluzione acquosa di potassa, viene completamente saponificato. Si diluisce il liquido con acqua e, per aggiunta di acido solforico diluito, si separa l'acido che si purifica dall'alcool, impiegando nero animale: si ottiene così un prodotto costituito da cristalli incolori che fondono a 208°, con sviluppo gassoso.

gr. 0.1184 diedero c. c. 19.5 di azoto a 10° e 752 mm.

N trovato 19.36 Calcolato per $C_{16}H_{14}N_4O_2$ 19.04

Come si è detto, al punto di fusione questo acido perde anidride carbonica e fornisce il triazolo: cristalli incolori che fondono a 123°.

Stiamo proseguendo lo studio della nuova reazione sopra altri derivati nitrosilici della stessa forma. Ringraziamo infine il dott. Giuseppe Greco che ci fu di valido aiuto nell'esecuzione delle esperienze che si riferiscono alla presente Nota.

Geometria. — *La teoria proiettiva delle congruenze* W *e il problema della deformazione infinitesima (metrica) di una superficie.* Nota del Corrisp. G. FUBINI.

Il problema della deformazione infinitesima di una superficie in geometria euclidea, conducendo alla teoria delle congruenze W, è un problema proiettivo; ciò che risulta ancora più evidente se si pensi che altrettanto avviene per il problema analogo in geometria non euclidea [1]. Il desiderio di veder chiaro questo fatto è l'origine della presente Nota.

Indicheremo con x, y, z, t e con ξ, η, ζ, τ coordinate omogenee di punto e piano, spesso indicando un punto o un piano con la sola prima coordinata. Accanto alla teoria proiettiva della geometria differenziale su una superficie pare meriti attenzione quella della geometria di una coppia di superficie $S, \overline{S}$, che qui vogliamo considerare l'una come luogo di un punto x, l'altra come inviluppo di un piano $\overline{\xi}$, pensati come funzioni degli stessi due parametri u, v (ciò che stabilisce una corrispondenza biunivoca tra le due superficie). Le espressioni

$$S\overline{\xi}x \ , \ S\overline{\xi}dx \ , \ Sd\overline{\xi}dx$$

sono invarianti quando si esegua sulle x una trasformazione unimodulare e sulle $\overline{\xi}$ la corrispondente trasform. contragrediente; esse variano in un modo semplice se si moltiplicano le x o le $\overline{\xi}$ per uno stesso fattore; potremmo

[1] Cfr. la Nota dell'A. nei Rend. della R. Acc. dei Lincei 1899 (vol. VIII, 1° sem., serie 5ª): *Sulle deform. infinit. delle superf. negli spazii a curv. costante.*

facilmente dedurne, come nel caso di una sola superficie, degli invarianti proiettivi, se normassimo in modo invariante le x e le ξ; ciò che qui non ci interessa. L'essere nulla la prima delle precedenti espressioni, cioè l'essere $S\bar{\xi}x = 0$ dice che il punto x e il piano $\bar{\xi}$ si appartengono; cioè caratterizza il caso che $(x, \bar{\xi})$ sia *un elemento* nel senso di Lie. Se è $S\bar{\xi}x = 0$, il *nostro studio equivale perciò allo studio di un sistema* ∞^2 *di elementi*. Se inoltre $S\bar{\xi}dx = 0$, allora S ed $\bar{S}$ coincidono: si tratta di una superficie considerata insieme come luogo dei suoi punti x e inviluppo dei suoi piani tangenti $\bar{\xi}$; siamo in tal caso ridotti allo studio di una sola superficie, di cui qui più non ci occupiamo. *Escluso il caso che* S, $\bar{S}$ *coincidano* e *sempre supponendo* $Sx\bar{\xi} = 0$, *cioè che* $(x, \bar{\xi})$ *sia un elemento*, proveremo che:

1°) *L'essere* $Sdxd\bar{\xi}$ *divisibile per* $S\bar{\xi}dx$ *caratterizza il fatto che* S *ed* $\bar{S}$ *siano falde focali di una stessa congruenza di rette* (*intersezione del piano* $\bar{\xi}$ *e del piano* ξ *tangente ad* S *in* x);

2°) *L'essere il quoziente ottenuto dividendo* $Sdxd\bar{\xi}$ *per* $S\bar{\xi}dx$ *un differenziale esatto caratterizza le superficie* S, $\bar{S}$, *falde focali di una stessa congruenza* W (cioè caratterizza falde focali di una congruenza di rette come nel caso 1°, sulle quali si corrispondano le asintotiche).

Prima di procedere alla dimostrazione premettiamo due osservazioni, che permetteranno di trasformare il 2° teorema.

α) Se sostituisco ϱx, e $\sigma\bar{\xi}$ alle $x, \bar{\xi}$, essendo ϱ, σ convenienti fattori di proporzionalità, si ha per la $Sx\bar{\xi} = 0$

$$\begin{aligned} Sd(\varrho x)\, d(\sigma\bar{\xi}) &= \varrho\sigma Sdxd\bar{\xi} + \varrho d\sigma S\bar{\xi}dx + \sigma d\varrho Sxd\bar{\xi} + d\varrho d\sigma Sx\bar{\xi} \\ &= \varrho\sigma Sdxd\bar{\xi} + (\varrho d\sigma - \sigma d\varrho)\, S\bar{\xi}dx \\ S\sigma\bar{\xi}\, d(\varrho x) &= \varrho\sigma S\bar{\xi}dx\,. \end{aligned}$$

I criterii dati dai precedenti teoremi non mutano al variare di ϱ, σ, e perciò *sono di carattere proiettivo*. Ma anzi il secondo teorema si può semplificare. Se

$$d\varphi = Sdxd\bar{\xi} : S\bar{\xi}dx\,,$$

il nuovo quoziente $Sd(\varrho x)\, d(\sigma\bar{\xi}) : S\sigma\bar{\xi}d(\varrho x)$ sarà:

$$d\varphi + d\log\frac{\sigma}{\varrho}\,,$$

cioè, ponendo $\frac{\sigma}{\varrho} = Ce^{-\varphi}$, con $C =$ costante, il nuovo quoziente sarà nullo. Il secondo teorema si potrà dunque annunciare anche così:

2° bis) *Se* $Sdxd\bar{\xi} = 0$, *le superficie* S, $\bar{S}$ *sono falde focali di una congruenza* W; *viceversa, se* S, $\bar{S}$ *sono falde focali di una congruenza* W, *allora, scelte ad arbitrio le coordinate omogenee di un punto x di* S, *si possono determinare* (*a meno di un solo fattore* COSTANTE) *le coordinate* $\bar\xi$ *in guisa che sia* $\mathrm{S}dxd\bar\xi=0$. Questo teorema è, come vedremo suscettibile di una semplicissima interpretazione geometrica.

β) Se $x, y, z, 1$ sono coordinate cartesiane ortogonali, la $\mathrm{S}x\bar\xi=0$ si riduce alla $\bar\tau=-(x\bar\xi+y\bar\eta+z\bar\zeta)$, che definisce $\bar\tau$. E la $\mathrm{S}dxd\bar\xi=0$ diventa

$$dx\,d\bar\xi+dy\,d\bar\eta+dz\,d\bar\zeta=0,$$

che è la nota equazione in geometria metrica euclidea per la deformazione infinitesima di una superficie S, quando con $\varepsilon\bar\xi, \varepsilon\bar\eta, \varepsilon\bar\zeta$ si indichino gli incrementi infinitesimi (se ε è parametro infinitesimo) delle coordinate x, y, z di un punto di S.

Se x, y, z, t sono le coordinate di Weierstrass di un punto x di una superficie S dello spazio ellittico, allora le

$$\mathrm{S}x\bar\xi=0 \qquad \mathrm{S}dx\,d\bar\xi=0$$

sono appunto le equazioni delle deformazioni infinitesime di una superficie S nello spazio ellittico, quando con $\varepsilon\bar\xi$, $\varepsilon\bar\eta$, $\varepsilon\bar\zeta$, $\varepsilon\bar\tau$ si indichino gli incrementi infinitesimi delle coordinate di un punto S.

Il teorema 2° bis rende perciò intuitivo il legame tra tali deformazioni infinitesime e la teoria delle congruenze W.

Dimostriamo dunque i teoremi 1 e 2 bis. Se ξ è il piano tangente ad S nel punto x, e se le u, v sono le coordinate asintotiche di S, potremo trovare (essendo $\mathrm{S}x\bar\xi=0$) delle quantità λ, A, B tali che:

$$\bar\xi=\lambda\xi+2(\mathrm{A}\xi_u-\mathrm{B}\xi_v) \qquad (1)$$

Dalla teoria delle superficie è noto che esistono delle funzioni $\mathrm{H}, \beta, \gamma, \pi, \varkappa$ ecc. delle u, v tali che (2):

$$x_{uu}=\frac{\partial \log \mathrm{H}}{\partial u}x_u+\beta x_v+px \quad ; \quad x_{vv}=\frac{\partial \log \mathrm{H}}{\partial v}x_v+\gamma x_u+qx\,;$$

$$\xi_{uu}=\frac{\partial \log \mathrm{H}}{\partial u}\xi_u-\beta\xi_v+\pi\xi \quad ; \quad \xi_{vv}=\frac{\partial \log \mathrm{H}}{\partial v}\xi_v-\gamma\xi_u+\varkappa\xi\,;$$

$$\mathrm{S}\xi x_u=\mathrm{S}\xi x_v=\mathrm{S}\xi_u x_u=\mathrm{S}\xi_v x_v=0 \qquad +\mathrm{S}\xi_u x_v=+\mathrm{S}\xi_v x_u=-\mathrm{H}\,;$$

$$\mathrm{S}\xi_u x_{uv}=\mathrm{S}\xi_v x_{uv}=0\,.$$

(1) Ciò perchè $\bar\xi=\xi$, ξ_u, ξ_v sono tre quaterne indipendenti di soluzioni della $\mathrm{S}x\bar\xi=0$.

(2) Si noti che se x, y, z e $t=1$ sono coordinate *non omogenee*, allora $p=q=0$.

Se ne deduce successivamente:

$$(1) \qquad S\bar{\xi}\,dx = -2H(A\,dv - B\,du)$$

$$\bar{\xi}_u = (\lambda_u + 2A\pi)\xi + \left(\lambda + 2A_u + 2A\frac{\partial \log H}{\partial u}\right)\xi_u - 2(B_u + A\beta)\xi_v - 2B\,\xi_{uv}$$

$$\bar{\xi}_v = (\lambda_v - 2B\varkappa)\xi + \left(\lambda - 2B_v - 2B\frac{\partial \log H}{\partial v}\right)\xi_v + 2(A_v + B\gamma)\xi_u + 2A\,\xi_{uv}$$

$$(2) \qquad S\,d\bar{\xi}\,dx = 2H(B_u + A\beta)\,du^2 - 2H(A_v + B\gamma)\,dv^2 - \\ -2H\,du\,dv\left(\lambda + A_u - B_v + A\frac{\partial \log H}{\partial u} - B\frac{\partial \log H}{\partial v}\right).$$

Affinchè (2) sia divisibile per (1) si trova come condizione necessaria e sufficiente:

$$\lambda = \frac{AB_v - BA_v}{A} + \frac{AB_u - BA_u}{B} - A\frac{\partial \log H}{\partial u} + B\frac{\partial \log H}{\partial v} + \beta\frac{A^2}{B} - \gamma\frac{B^2}{A},$$

che è proprio la stessa equazione a cui nella teoria delle congruenze si perviene esprimendo che $\bar{\xi}$ è il piano tangente alla seconda falda focale della congruenza generata dalla retta d'intersezione dei piani $\xi, \bar{\xi}$: congruenza, le cui rette sono pertanto tangenti ad S, e che ha quindi S per prima falda focale.

A questo calcolo fa eccezione il caso che $A = 0$, oppure $B = 0$. Non può essere contemporaneamente $A = B = 0$, perchè altrimenti le superficie $S, \bar{S}$ coinciderebbero, ciò che abbiamo escluso. Se fosse, p. es., $A = 0$, allora, affinchè (2) sia divisibile per (1), dovrebbe essere $B\gamma = 0$, e quindi saremmo di nuovo nel caso escluso $A = B = 0$, a meno che fosse $\gamma = 0$, cioè che la S fosse una superficie *rigata*: caso che si tratta facilmente a parte [1]. Se poi (2) deve essere identicamente nullo, troviamo in più che:

$$A_v = -B\gamma \quad , \quad B_u = -A\beta\,,$$

che sono appunto le equazioni fondamentali della teoria proiettiva delle congruenze W, così come è stata svolta in tre Note pubblicate recentemente in questi Rendiconti. I nostri teoremi sono così completamente provati.

[1] Il caso $A = \gamma = 0$ si esaurisce in breve. Per la $\gamma = 0$ le $u =$ cost. della S sono rette; per la $A = 0$ è $S\bar{\xi}x_v = 0$, cioè i piani $\bar{\xi}$ contengono una generatrice di S; i piani $\bar{\xi}$ sono dunque gli stessi piani tangenti ad S; in altre parole la corrispondenza tra i punti x e i piani $\bar{\xi}$ equivale ad una corrispondenza che a ogni punto x di S fa corrispondere un piano $\bar{\xi}$ tangente ad S in un punto $\bar{x}$ della generatrice di S uscente da x. Saremmo sempre nel caso escluso di superficie $S, \bar{S}$ coincidenti.

Interpretiamo geometricamente il teorema 2 bis. Sul piano tangente ad S nel punto x scegliamo una retta qualunque non passante per x: essa congiungerà un punto $x_u + \alpha x$ a un punto $x_v + \beta x$. Se α , β sono funzioni di u , v, tale retta descriverà una congruenza; la equazione delle sviluppabili si ottiene annullando il determinante che esprime che i punti

$$x_u + \alpha x \ , \ x_v + \beta x \ , \ d(x_u + \alpha x) \ , \ d(x_v + \beta x)$$

sono complanari. Il termine in $du\,dv$ di questa equazione è nullo, come rivela un facile calcolo, soltanto quando $\alpha'_v = \beta'_u$, cioè quando esiste una funzione ϱ tale che $\alpha = \varrho_u : \varrho \ , \ \beta = \varrho_v : \varrho$; cioè quando la retta congiunge i punti $(\varrho x)_u$ e $(\varrho x)_v$. In tal caso la congruenza ha le sviluppabili che, o sono indeterminate, o corrispondono a un sistema coniugato sulla S; la congruenza è cioè *armonica* o *coniugata* ad S. *Le congruenze armoniche ad* S *formate con rette dei piani tangenti ad* S *sono soltanto tutte quelle, le cui rette congiungono i punti* $(\varrho x)_u$ *e* $(\varrho x)_v$, *ossia sono il luogo del punto* $d(\varrho x)$, *punto che al variare di* $\frac{dv}{du}$ *descrive appunto una retta. Così le congruenze armoniche ad* $\overline{\mathrm{S}}$ *formate con rette uscenti dai punti di* $\overline{\mathrm{S}}$ *sono le rette sostegno del fascio di piani* $d(\sigma \overline{\xi})$.

Date le ϱ , σ, allora ad ogni sistema di valori per $du : dv , u , v$ corrispondono un punto di una retta della prima congruenza, e un piano della retta omologa della seconda.

Ora, se dato ϱ si può (a meno di un inessenziale fattore costante) determinare σ in modo che $\mathrm{S}d(\varrho x)\, d(\sigma \overline{\xi}) = 0$, ciò significa che ogni tale punto $d(\varrho x)$ e ogni piano $d(\sigma \overline{\xi})$ si appartengono, qualunque siano $u , v , \frac{dv}{du}$. Dunque:

Teor. 2 ter). *Affinchè* S *ed* $\overline{\mathrm{S}}$ *siano falde focali di una stessa congruenza* W *è necessario e sufficiente che tra le congruenze armoniche ad* S , $\overline{\mathrm{S}}$ *poste nei piani tangenti ad* S *od uscenti da un punto di* $\overline{\mathrm{S}}$ *si possa stabilire una tale corrispondenza biunivoca che a uguali valori di* $u , v , \frac{dv}{du}$ *corrispondano un punto su un raggio della prima. e un piano passante per un raggio della seconda. che si appartengono. Si noti che da questa condizione segue l'altra* $\mathrm{S}\overline{\xi} x = 0$, *che perciò non è necessario enunciare esplicitamente.* Infatti, se essa è soddisfatta, potrò determinare le $x , \overline{\xi}$ in guisa che $\mathrm{S}dx\,d\overline{\xi} = 0$. Di più, scelto ad arbitrio uno dei due fattori ϱ , σ potrò determinare l'altro così che sia $\mathrm{S}d(\varrho x)\, d(\sigma \overline{\xi}) = 0$, cioè:

$$\frac{d\varrho}{\varrho} \mathrm{S}x d\overline{\xi} + \frac{d\sigma}{\sigma} \mathrm{S}\overline{\xi} dx + \frac{d\varrho}{\varrho}\frac{d\sigma}{\sigma} \varphi = 0 \qquad (\varphi = \mathrm{S}\overline{\xi} x).$$

Debbo provare che $\varphi = 0$. Se per ogni σ la corrispondente ϱ risulta una funzione $F(\log \sigma)$ di σ (potendo anche la funzione F variare con σ) risulterà:

$$[F'(\sigma) - 1]\, Sx\, d\bar{\xi} + d\varphi + F'(\sigma)\, \varphi \frac{d\sigma}{\sigma} = 0 .$$

Se $F'(\sigma) = 0$ risulterebbe $\varrho = \text{cost.}$, ciò che è assurdo perchè ϱ è arbitrario ([1]). Se $F'(\sigma) = 1$, sarebbe $\varrho = C\sigma$ con $C = \text{cost.}$, e quindi $\varphi = 0$, perchè $\frac{d\sigma}{\sigma}$ è arbitrario, c. d. d. Se invece ϱ non risultasse funzione di σ, il valore $\frac{du}{dv}$, per cui $d\sigma = 0$, annullerebbe $Sx\, d\bar{\xi}$; ed, essendo σ arbitrario, risulterebbe $Sx\, d\bar{\xi} = 0$ e per simmetria anche $S\bar{\xi}\, dx = 0$; ne dedurremmo immediatamente, essendo $d\varrho$, $d\sigma$ differenti di solito da zero, che $\varphi = 0$ c. d. d.

Se dunque $\varphi \neq 0$, potremmo richiedere *che due particolari congruenze armoniche ad* S, $\bar{S}$ *siano nelle condizioni del precedente teorema*, ma non già richiedere che *ogni* congruenza armonica ad S sia nella corrispondenza richiesta con una congruenza armonica ad $\bar{S}$. In tal caso possiamo scegliere x, $\bar{\xi}$ in guisa che $S\, dx\, d\bar{\xi} = 0$. Dalla $Sx_u \bar{\xi}_u = 0$ si deduce subito che $\bar{\xi}_u$ è combinazione lineare di ξ, ξ_u, ξ_{uv}; risultato analogo si deduce per $\bar{\xi}_v$ dalla $Sx_v \bar{\xi}_v = 0$. E la $S(x_u \bar{\xi}_v + x_v \bar{\xi}_u) = 0$ prova poi che valgono formole del tipo:

$$\bar{\xi}_u = A\xi + L\xi_u + C\xi_{uv} \qquad \bar{\xi}_v = B\xi - L\xi_v + D\xi_{uv}$$

Le condizioni d'integrabilità permettono di esprimere A, B, L in funzione di C, D e danno una sola equazione tra C, D. Per ogni coppia di funzioni C, D soddisfacenti a questa equazione esiste una superficie $\bar{S}$, che con S si trova nei rapporti voluti. Tali coppie di superficie S, $\bar{S}$ sembrano la più naturale estensione delle coppie di superficie trasformate per congruenze W.

([1]) Si potrebbe veramente pensare a una corrispondenza evidentemente singolare che ad una σ generica facesse sempre corrispondere una $\varrho = \text{cost.}$, ed a un ϱ generico una $\sigma = \text{cost.}$ In tal caso la nostra equazione direbbe che $Sx\, d\bar{\xi} = S\bar{\xi}\, dx = 0$ e quindi $S\bar{\xi} x = C = \text{cost.}$; sarebbe allora $\bar{\xi} = h\xi + \frac{C}{H}\xi_{uv}$, dove h è una funzione di u, v. Annullando i coefficienti di du^2, dv^2 nella $S\, dx\, d\bar{\xi} = 0$, si troverebbe $p = q = 0$, cosicchè si potrebbe supporre $t = 1$. Le $S\bar{\xi}\, dx = S\xi\, dx = 0$ dimostrano allora (essendo $dt = 0$) che $\bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{\zeta}$ sono proporzionali a ξ, η, ζ. Se α è il fattore di proporzionalità, la $S\, d\bar{\xi}\, dx = 0$ dà $\alpha = 0$, ciò che è assurdo.