ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE

DEI LINCEI

ANNO CCCXX

1923

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXXII.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1923

Fisica. — *Fenomeni di reostrizione interpretati in base alle leggi fondamentali dell'elettrodinamica.* Nota del Corrispondente L. LOMBARDI.

Nella letteratura elettrotecnica, e segnatamente nelle Riviste americane, vennero di tempo in tempo segnalati alcuni fenomeni di deformazione di circuiti elettrici, attraversati da correnti molto intense, la cui interpretazione, in base alle leggi fondamentali della elettrodinamica, non apparve chiara a coloro, che per i primi li avevano osservati; onde essi con soverchia leggerezza insinuarono il dubbio, che queste non valessero in generale, e ne suggerirono modifiche che non sono necessarie.

Carlo Hering, il quale, anni or sono, già pose in dubbio la interpretazione della legge generale della induzione [1], in due lavori più recenti [2] richiama l'attenzione sopra alcuni fenomeni di movimento e contrazione di vene fluide di notevoli dimensioni, da lui primitivamente osservati nelle fornaci elettriche per la fusione dei metalli, e ingegnosamente utilizzati a provocarne la desiderata rimescolanza. Quando la corrente raggiunge una intensità adeguata, la vena manifesta al mezzo una contrazione trasversale, caratterizzata da Hering col nome di *pinch effect*, e in tutta la sua lunghezza una tendenza a espandersi, che egli denomina *stretch effect*; nelle brusche piegature essa rivela poi tendenza a sopraelevarsi, cui Hering dà il nome di *corner-effect*, quasi assumendo che le tre azioni siano di natura diversa, laddove esse traggono origine dal medesimo fenomeno, che la formola di Ampère spiega in modo esauriente.

Hering presume che il fenomeno di contrazione non sia giustificato dalla legge generale dell'attrazione dei filetti paralleli, contro la validità della quale eccepisce che i fasci paralleli di raggi catodici fra loro si respingono, senza riflettere che questi sono costituiti da elettroni in movimento con velocità minore di quella della luce, a la quale soltanto la repulsione elettrostatica fra le masse elettriche verrebbe bilanciata dalla attrazione elettromagnetica delle correnti equivalenti; suppone del pari il fenomeno di distensione contraddetto dalla legge delle attrazioni di correnti parallele, senza tener conto che nella formola di Ampère:

$$df = i' \, i'' \frac{ds' \, ds''}{r^2} \left[\cos \varepsilon - \frac{3}{2} \cos \theta' \cos \theta'' \right],$$

(1) Mia Nota all'*Accademia Pontaniana*, Napoli, 1916.

(2) Journal of the Franklin Institute, vol, 192, pag. 599; Journal of the Am. Inst. of Electr. Eng., 1923, pag. 139.

il termine negativo soverchia il positivo, quante volte l'angolo dei due elementi di circuito con la congiungente dei baricentri discende sotto una trentina di gradi; trova finalmente inesplicabile il terzo fenomeno in base alla teoria di Maxwell, che ammette non potersi esercitare sopra un conduttore, percorso da corrente, una sollecitazione ponderomotrice mediante campi esterni, senza riflettere che le esperienze di Ampère hanno dimostrato tale inettitudine bensì per i campi dovuti a circuiti esterni chiusi, laddove nel caso attuale si tratta di azioni fra elementi del medesimo circuito, che la stessa formola di Ampère permette di prevedere e calcolare *a priori*, e che tendono semplicemente a distendere il circuito senza conferirgli alcuna traslazione nello spazio.

In verità Northrup [1], a seguito immediato della scoperta di Hering, formulò la teoria della contrazione trasversale, e in un lavoro più recente [2] la estese anche all'*effetto motore*, che si manifesta nelle fornaci Ajax-Wyatt, valendosi unicamente delle formole di Maxwell, che caratterizzano l'attrazione di filetti attraversati da correnti parallele, e la sollecitazione che i singoli elementi di circuito subiscono in un campo magnetico. La teoria di Northrup non è peraltro completa, in quanto trascura le sollecitazioni longitudinali previste dalla legge di Ampère, e una parte di quelle trasversali, dovute al campo esterno, le cui linee di forza circolari, tendendo a contrarsi in senso tangenziale, esercitano alla superficie uno sforzo radiale, calcolabile in base alla teoria di Maxwell.

Facendo a questa ricorso, è possibile analizzare in gran parte il complesso fenomeno in modo abbastanza semplice.

Secondo il ragionamento di Maxwell [3], — il quale riproduce analiticamente il concetto di Faraday, – entro un mezzo isotropo, di permeabilità unitaria, nel quale la induzione ha la stessa grandezza e direzione della forza magnetica, deve manifestarsi lungo le linee di forza una tensione longitudinale, misurata da $\frac{H^2}{8\pi}$, e in ogni altra direzione, ortogonale alle linee predette, una pressione misurata dalla medesima grandezza. Se il mezzo è attraversato da corrente, o affètto da masse magnetiche libere, su di esso si esercitano, da parte del campo magnetico, forze unitarie ponderometrici, che hanno per componenti secondo gli assi:

$$X = \alpha m - v\gamma - w\beta ;$$
$$Y = \beta m - w\alpha - u\gamma ;$$
$$Z = \gamma m - u\beta - v\alpha .$$

Qui m misura la densità delle masse magnetiche libere; $\alpha\, \beta\, \gamma$ le componenti della forza magnetica secondo gli assi; $u\, v\, w$ le componenti della

(1) Physical Review, vol. XXIV, pag. 474.
(2) Journal of the Franklin Institute, vol. 190, pag. 816.
(3) Treatise, § 642, 643.

densità di corrente secondo gli assi. Nel nostro caso, trattandosi di vene fluide di metalli non magnetici [e come tale può considerarsi anche il ferro a temperature molto elevate], i primi termini cadono fuori considerazione, e, se si considerano per semplicità vene di sezione circolare, e di lunghezza sufficiente per poterle trattare a la stregua di cilindri di lunghezza indefinita, la forza magnetica, in presenza di correnti dirette secondo l'asse, assume la direzione tangenziale. Prescindendo dall'effetto pellicolare (il quale complicherebbe notevolmente le considerazioni, ove si trattasse di correnti alternate di notevole frequenza), e indicando con R il raggio della vena, con r la distanza di un punto interno dall'asse e con i la intensità totale della corrente, l'intensità del campo magnetico diventa notoriamente

$$H_r = 2i \frac{r}{R^2}$$

e la tensione tangenziale

$$p_r = \frac{H_r^2}{8\pi} = \frac{i^2 r^2}{2\pi R^4}.$$

Questa grandezza misura anche la pressione radiale, che al limite si annulla per i punti dell'asse, e alla periferia del conduttore assume il valore massimo $\frac{i^2}{2\pi R^2}$; nonchè la pressione longitudinale nei diversi filetti paralleli all'asse, la quale dà luogo in tutta la sezione a uno sforzo complessivo

$$P = 2\pi \int_0^R p \,.\, r \,.\, dr = \frac{i^2}{4}$$

ed assume come valor medio nella sezione la metà di quello massimo della pressione radiale e longitudinale. Poichè ognuno di questi sforzi varia in ragione del quadrato della intensità di corrente, il valor medio in presenza di correnti alternate è legato dalle stesse relazioni al quadrato della intensità efficace.

Per calcolare le forze di massa, esercitate dal campo magnetico su l'unità di volume della sostanza, onde è costituita la vena conduttrice, bisogna ricorrere ai gradienti delle pressioni unitarie, i quali riconducono, secondo il procedimento di Maxwell, alle formole già sviluppate. E pertanto, poichè la forza magnetica ha unicamente valore finito nel senso tangenziale, e la densità di corrente in senso longitudinale, lo sforzo ponderomotore si rivela esclusivamente in senso radiale, e diventa, secondo la formola di Northrup:

$$f_r = Hu = 2iu \frac{r}{R^2} = \frac{2i^2 r}{\pi R^4}.$$

Questi considera come sforzo totale di compressione a una distanza r dall'asse la somma di tutte le sollecitazioni, esercitate dal campo sopra gli strati cilindrici del conduttore, compresi fra il raggio r e quello esterno, somma data dall'integrale

$$g_r = \frac{2i^2}{\pi R^4}\int_r^R r\,dr = \frac{i^2}{\pi R^4}(R^2 - r^2),$$

con che la pressione risultante alla superficie appare nulla. Più esattamente sembra il caso di considerare come pressione radiale complessiva la somma di questa, che è una sollecitazione idrostaticamente trasferita dagli strati esterni, con quella esercitata dal campo alle diverse profondità, con che si ottiene una forza unitaria complessiva

$$G_r = g_r + p_r = \frac{i^2}{\pi R^4}\left(R^2 - \frac{r^2}{2}\right).$$

Questa, al limite periferico, riprende la grandezza già calcolata da me, e da Northrup trascurata, $\frac{i^2}{2\pi R^2}$, e assume nei punti dell'asse il valore doppio.

Nella direzione dell'asse, secondo le formole di Maxwell, non si prevede alcuna forza ponderomotrice esercitata sul mezzo conduttore, in quanto si annulla il gradiente del campo magnetico; ma ciò non basta a escludere lo sforzo di distensione, dovuto alla ripulsione degli elementi allineati di circuito, prevista nella formola di Ampère, e suscettibile di calcolazione diretta in base all'energia potenziale del circuito.

Secondo la formola di Neumann, che scaturisce direttamente da quella di Ampère, l'energia elettromagnetica potenziale del circuito, che abbia il coefficiente di selfinduzione L, è misurata da $-\frac{1}{2}L\,i^2$, dove questo coefficiente assume il valore

$$L = \iint \frac{ds'\,ds''}{r^2}\cos\varepsilon.$$

L'integrale va esteso due volte al contorno di tutto il circuito, se questo è chiuso; ma può riferirsi anche alla lunghezza di un tratto finito di esso, nel qual caso l'energia potenziale equivale al lavoro di polarizzazione del mezzo, calcolato con la formola di Maxwell, attribuendo in ogni punto al campo la risultante delle intensità elementari, desunte dalla formola di Laplace.

Per un principio generale di meccanica, ogni sistema, affetto da energia potenziale, tende a deformarsi in modo che questa diminuisca, e per una deformazione elementare si ottiene lo sforzo sollecitante, dividendo il lavoro compiuto per lo spazio infinitesimo percorso, ossia derivando l'energia potenziale rispetto alla variabile, che caratterizza la direzione dello spostamento.

Per un tratto di conduttore cilindrico e rettilineo, di lunghezza l e raggio R, il coefficiente di selfinduzione è

$$L = 2l\left[\log\frac{2l}{R} - \frac{3}{4}\right]$$

astraendo dalla piccola frazione $\frac{\varrho}{l}$, dove ϱ misura la media distanza geometrica fra i punti di una sezione trasversale. L'energia potenziale diventa pertanto

$$-\frac{1}{2}L\,i^2 = -i^2 l\left[\log\frac{2l}{R} + \frac{3}{4}\right]$$

ed essa ha per derivata rispetto a l, supposta i costante,

$$F' = -i^2\left[\log\frac{2l}{R} + \frac{1}{4}\right].$$

Lo sforzo unitario medio diventa, in base al ragionamento predetto,

$$f' = -\frac{i^2}{\pi R^2}\left[\log\frac{2l}{R} + \frac{1}{4}\right].$$

Il secondo termine coincide con la pressione media longitudinale, secondo la formola di Maxwell, e il primo sembra perciò doversi interpretare come lo sforzo supplementare, di carattere elettrodinamico, da Maxwell trascurato.

Nel senso radiale la complessiva sollecitazione esercitata alla periferia si ottiene analogamente, derivando l'energia potenziale rispetto al raggio,

$$F'' = \frac{i^2 l}{R}$$

e, riferita all'unità di superficie, ci dà lo sforzo unitario di compressione, già prima calcolato, e coincidente con la pressione di Maxwell:

$$f'' = \frac{F''}{2\pi Rl} = \frac{i^2}{2\pi R^2}.$$

La discordanza dei risultati non sembra strana, quando si pensa che in direzione radiale la sollecitazione del campo sui filetti di corrente è l'unica forza agente, e viene calcolata appunto in base alle formole, che Maxwell ha dedotto dalla teoria delle pressioni elettromagnetiche, laddove nella direzione dell'asse si aggiungono gli sforzi elettrodinamici di repulsione, che Maxwell ha trascurato.

Non altrimenti, se si considerasse un solenoide cilindrico ad asse rettilineo con N spire di raggio R, distribuite nella lunghezza l, l'energia potenziale risulterebbe

$$-\frac{1}{2}\,\mathrm{L}\,i^2 = -\frac{2\pi^2 \mathrm{N}^2 \mathrm{R}^2}{l}\,i^2\,,$$

di cui la derivata rispetto a l dà lo sforzo longitudinale di contrazione,

$$\mathrm{F}' = -\frac{i^2}{2}\frac{d\mathrm{L}}{dl} = \frac{2\pi^2 \mathrm{N}^2 \mathrm{R}^2 i^2}{l^2}$$

onde lo sforzo unitario risulta:

$$f' = \frac{2\pi\,\mathrm{N}^2 i^2}{l^2}$$

ed esso equivale a quello di attrazione, sviluppato fra le lamine contigue di potenza i e di intensità magnetica $\frac{i\mathrm{N}}{l}$.

In senso radiale la sollecitazione totale a espandersi è

$$\mathrm{F}'' = \frac{i^2}{2}\frac{d\mathrm{L}}{d\mathrm{R}} = \frac{4\pi^2 \mathrm{N}^2 \mathrm{R}}{l}\,i^2$$

e quella unitaria diventa

$$f'' = \frac{\mathrm{F}''}{2\pi \mathrm{R} l} = \frac{2\pi\,\mathrm{N}^2}{l^2}\,i^2\,.$$

Questa è uguale alla precedente, e coincide del pari con la pressione elettromagnetica di Maxwell.

Si può anche in questo caso considerare lo sforzo di espansione del solenoide in senso radiale, come effetto di uno sforzo interno di distensione del filo che lo compone, in senso tangenziale, e questo può essere calcolato col solito artificio. Introducendo una nuova variabile, che misuri la lunghezza complessiva del filo

$$2\pi\,\mathrm{RN} = a\,,$$

in relazione a questa il coefficiente di selfinduzione vale

$$\mathrm{L} = \frac{4\pi^2 \mathrm{N}^2 \mathrm{R}^2}{l} = \frac{a^2}{l}\,.$$

e l'energia potenziale elettromagnetica

$$-\frac{1}{2}\,\mathrm{L}\,i^2 = -\frac{a^2}{2l}\,i^2\,.$$

Derivando rispetto ad a, si ottiene lo sforzo di distensione

$$-\frac{a}{l}\,i^2 = -\frac{2\pi\,\mathrm{RN}}{l}\,i^2$$

che è della stessa natura di quello calcolato come sforzo longitudinale nell'interno del filo rettilineo, ma, a fianco del fattore i^2, comune a tutte queste sollecitazioni, comprende un fattore dimensionale diverso, per la diversa configurazione attribuita al circuito. Paragonato allo sforzo integrale di espansione in senso radiale, quello di distensione del filo diventa $2\pi\,\mathrm{N}$ volte più piccolo, per cui esso può anche interpretarsi come lo sforzo integrale per ogni unità di angolo piano sottesa dal filo.

Alla stregua di queste considerazioni, le sollecitazioni interne nei conduttori attraversati da correnti si presentano in una forma più complicata di quella prevista nella teoria di Maxwell, e una verifica sperimentale completa non appare scevra di difficoltà, sia che si tratti di conduttori solidi, soggetti per tali sollecitazioni a deformarsi elasticamente, sia che si tratti di vene fluide, nell'interno delle quali quelle sollecitazioni si trasmettono da strato a strato, e per avventura si possono comporre con altre di vero carattere idrostatico. Il complesso di tale fenomeni assume pertanto una notevole analogia con quelli di *elettro* e *magneto-strizione*, onde per essi sembra appropriato il nome di *fenomeni di reostrizione*, suggerito dal prof. Corbino, a preferenza di quelli più o meno suggestivi proposti dai colleghi americani. E per essi è ancora interessante osservare come la legge fondamentale della elettrodinamica, racchiusa nelle classiche formole di Ampère e di Neumann, conservi pienamente la sua validità, onde i nuovi enunciati, suggeriti da Hering, appaiono, in sostanza, destituiti di fondamento.