ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE
DEI LINCEI

ANNO CCCXX

1923

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXXII.

1° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1923

NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sulle relazioni differenziali che legano i coefficienti di rotazione del Ricci.* Nota di Carlo Dei, presentata dal Socio T. Levi-Civita.

1. Nella Memoria del Ricci intitolata *Sistemi di congruenze ortogonali in una varietà qualunque*, si prendono in considerazione n^2 funzioni $\lambda_h^{(r)}$ di n variabili indipendenti $x_1, x_2, \dots, x_n$ e gli n operatori lineari da esse definiti

$$\mathrm{X}_h f = \sum_1^n {}_r\, \lambda_h^{(r)} \frac{\partial f}{\partial x_r} \qquad (h = 1, 2, \dots, n) \tag{1}$$

(supponendo che il determinante delle $\lambda_h^{(r)}$ sia diverso da zero, sicchè i detti operatori risultino linearmente indipendenti).

Coll'associare ad ognuno di questi le rispettive caratteristiche, cioè la congruenza di linee definita dalle equazioni differenziali

$$\frac{dx_1}{\lambda_h^{(1)}} = \frac{dx_2}{\lambda_h^{(2)}} = \dots = \frac{dx_n}{\lambda_h^{(n)}} \qquad (h = 1, 2, \dots, n),$$

e facendo intervenire una metrica opportunamente definita della varietà analitica $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, il Ricci introdusse i cosiddetti *coefficienti di rotazione* dell'ennupla $\lambda_h^{(r)}$.

Sono questi i noti invarianti del 1° ordine

$$\gamma_{hkl} = -\gamma_{khl} \qquad (h, k, l = 1, 2, \dots, n). \tag{2}$$

Essi dipendono dalle λ e dalle loro derivate prime in un modo che non ci importa ora di richiamare, bastando al nostro scopo l'osservazione che le γ rimangono individuate dalle funzioni alternate degli n operatori (1). Queste infatti sono del tipo

$$(\mathrm{X}_k, \mathrm{X}_h) f = \mathrm{X}_k \mathrm{X}_h f - \mathrm{X}_h \mathrm{X}_k f = \sum_1^n {}_i\, c_{khi} \mathrm{X}_i f, \tag{3}$$

dove le c designano funzioni delle x (ovvie combinazioni delle λ e delle loro derivate prime) che godono, per questa stessa loro definizione, della proprietà di emisimmetria rispetto ai primi due indici; cioè

$$c_{hki} = -c_{khi}. \tag{4}$$

Ora le γ sono legate alle c dalle identità [1]

$$c_{ihk} = \gamma_{ihk} - \gamma_{ikh} \tag{5}$$

le quali, unitamente alle (2), forniscono senz'altro le γ come combinazioni lineari delle c.

Tutto ciò premesso, ricordiamo che il Ricci riconobbe, sfruttando sempre la metrica della varietà, ed appoggiandosi sulle note proprietà dei simboli di Riemann, che i suoi coefficienti di rotazione sono legati da notevoli relazioni differenziali.

Io mi propongo qui di ritrovare queste relazioni differenziali senza fare intervenire nè i simboli di Riemann nè alcuna considerazione d'indole geometrica. Mostrerò anzi che si può raggiungere l'intento per due vie diverse: sia considerando direttamente gli operatori (1) e ricorrendo alla ben nota identità di Poisson-Jacobi; sia, con procedimento per così dire duale, sostituendo agli n operatori gli n pfaffiani associati e tenendo conto dell'identico annullarsi del covariante trilineare [derivato del derivato secondo il sig. Cartan [2]].

Non mi consta che queste osservazioni sieno state mai rese di pubblica ragione, ma ho saputo che il prof. Amaldi vi era già da tempo pervenuto per suo conto, e mi faccio dovere di dargliene atto nella presente occasione. Lo stesso prof. Amaldi mi ha cortesemente informato che già il sig. Zorawski [3] (generalizzando le identità che si incontrano nella teoria dei gruppi finiti) ebbe a fare uso delle relazioni differenziali tra le c, senza però rilevarne la coincidenza coi risultati del Ricci.

2. Prendiamo tre operatori lineari X_k, X_h, X_l. È noto che fra essi passa la relazione identica [4] (detta identità di Poisson-Jacobi):

$$\big((X_k, X_h), X_l\big) f + \big((X_h, X_l), X_k\big) f + \big((X_l, X_k), X_h\big) f = 0 .$$

Il 1° termine sviluppato rappresenta la somma

$$(X_k, X_h) X_l f + X_l (X_h, X_k) f ,$$

[1] Cfr. Ricci e Levi-Civita, *Méthodes de calcul différentiel absolu et leurs applications* (Mathematische Annalen, vol. LIV, 1900); Levi-Civita. *Tipi di potenziali che si possono far dipendere da due sole coordinate*, § 4 (Memorie della R. Acc. delle Scienze di Torino, tom. XLIX, 1899).

[2] Cfr. *Leçons sur les invariants intégraux*, p. 71 [Paris, Hermann, 1922].

[3] K. Zorawski, *Ueber gewisse Transformationseigenschaften der vielfachen Integrale* (Bulletin de l'Académie des Sciences de Cracovie, 1909, p. 523).

[4] Cfr., per es., Bianchi, *Teoria dei gruppi continui finiti di trasformazioni* (Pisa, Spoerri, 1918).

dove, come risulta immediatamente dalle (3),

$$(X_k, X_h)\, X_l f = \sum_1^n {}_i\, c_{khi}\, X_i X_l f,$$

$$X_l (X_h, X_k) f = X_l \sum_1^n {}_i\, c_{hki}\, X_i f = \sum_1^n {}_i\, X_i f\, X_l c_{hki} + \sum_1^n {}_i\, c_{hki}\, X_l X_i f.$$

Se ora sommiamo queste due relazioni e le altre quattro analoghe che si hanno per trasposizione ciclica degli indici k, h, l nell'ordine scritto, l'identità di Poisson-Jacobi si scriverà:

$$\sum_1^n {}_i \left\{ c_{hki} (X_l, X_i) f + c_{lhi} (X_k, X_i) f + c_{kli} (X_h, X_i) f \right\} +$$
$$+ \sum_1^n {}_i\, X_i f\, (X_l c_{hki} + X_k c_{lhi} + X_k c_{kli}) = 0.$$

Ma, siccome

$$\sum_1^n {}_i\, c_{hki} (X_l, X_i) f = \sum_1^n {}_{ij}\, c_{hki}\, c_{lij}\, X_j f,$$

si ha ulteriormente

$$\sum_1^n {}_j\, X_j f \left\{ \sum_1^n {}_i (c_{hki} c_{lij} + c_{lhi} c_{kij} + c_{kli} c_{hij}) + X_l c_{hkj} + X_k c_{lhj} + X_h c_{klj} \right\} = 0.$$

Questa identità deve sussistere qualunque sia la funzione f [1]. Perciò (data l'indipendenza lineare degli operatori X) dovrà essere identicamente nullo il coefficiente di $X_j f$. Sviluppando le due parti di tale coefficiente in base alle (5) e ordinando convenientemente, risulta:

$$X_l c_{hkj} + X_k c_{lhj} + X_h c_{klj} =$$
$$= (X_l \gamma_{jhk} - X_k \gamma_{jhl}) + (X_k \gamma_{jlh} - X_h \gamma_{jlk}) + (X_h \gamma_{jkl} - X_l \gamma_{jkh}),$$

$$\sum_1^n {}_i (c_{hki} c_{lij} + c_{lhi} c_{kij} + c_{kli} c_{hij}) = \sum_1^n {}_i \left\{ \gamma_{jhi} (\gamma_{ikl} - \gamma_{ilk}) + \gamma_{ijl} \gamma_{ihk} - \gamma_{ijk} \gamma_{ihl} \right\}$$
$$+ \sum_1^n {}_i \left\{ \gamma_{jli} (\gamma_{ihk} - \gamma_{ikh}) + \gamma_{ijk} \gamma_{ilh} - \gamma_{ijh} \gamma_{ilk} \right\}$$
$$+ \sum_1^n {}_i \left\{ \gamma_{jki} (\gamma_{ilh} - \gamma_{ihl}) + \gamma_{ijh} \gamma_{ikl} - \gamma_{ijl} \gamma_{ikh} \right\}.$$

[1] Scelto per es. f tale che $X_1 f = 0 \ldots\, X_{j'} f \neq 0 \ldots\, X_n f = 0$ si ha che il coefficiente è nullo per $j = j'$.

Se ora si pone

$$(6)\quad \gamma_{jh,kl} = \mathrm{X}_l\,\gamma_{jhk} - \mathrm{X}_k\,\gamma_{jhl} + \sum_1^n{}_i \left\{ \gamma_{jhi}(\gamma_{ikl} - \gamma_{ilk}) + \gamma_{ijl}\,\gamma_{ihk} - \gamma_{ijk}\,\gamma_{ihl} \right\},$$

si è, in definitiva, condotti alle identità del Ricci

$$(7)\qquad \gamma_{jh,kl} + \gamma_{jl,hk} + \gamma_{jk,lh} = 0 .$$

Dalle posizioni (6), per la proprietà emisimmetrica dei coefficienti di Ricci rispetto ai primi due indici, risulta l'emisimmetria delle $\gamma_{ih,kl}$ tanto rispetto alla prima, quanto alla seconda coppia di indici. Inoltre, se si considerano, oltre alla relazione (7), le altre tre analoghe ottenute per sostituzione circolare degli indici, e dalla somma della prima ed ultima si toglie la somma della seconda e terza, risulta come necessaria conseguenza la relazione di simmetria (rispetto alle coppie di indici)

$$\gamma_{jh,kl} = \gamma_{kl,jh} .$$

3. Può interessare vedere come le stesse proprietà delle γ a quattro indici si ricavano dalla teoria dei pfaffiani. Accanto alle funzioni $\lambda_h^{(r)}$ si considerino gli elementi reciproci $\lambda_{h/r}$ del determinante da esse formato e si introducano gli n pfaffiani

$$\psi_h = \sum_1^n{}_r\,\lambda_{h/r}\,dx_r \qquad (h = 1\,,2\,,\dots,n).$$

La signorina Carpanese ([1]) ha rilevato che, previa conveniente definizione dei differenziali secondi delle variabili indipendenti x, si ha identicamente

$$u_i = (d'd'' - d''d')\,\psi_i = \sum_1^n{}_{hkq}\,\gamma_{ih,qk}\,\psi_h\,\psi'_k\,\psi''_q\,,$$

ove ψ', ψ'' sono gli stessi pfaffiani ma relativi agli incrementi d', d'' delle x.

Se consideriamo accanto all'invariante u_i i seguenti due invarianti, costruiti analogamente:

$$u'_i = (d''d - d\,d'')\,\psi'_i = \sum_1^n{}_{hkq}\,\gamma_{ih,qk}\,\psi'_h\,\psi''_k\,\psi_q\,,$$

$$u''_i = (d\,d' - d'd)\,\psi''_i = \sum_{1\ hkq}^n \gamma_{ih,qk}\,\psi''_h\,\psi_k\,\psi'_q\,,$$

e formiamo il così detto covariante trilineare $u_i + u'_i + u''_i$, si riconosce che

$$u_i + u'_i + u''_i = 0 .$$

([1]) Cfr. *Parallelismo e curvatura in una varietà qualunque* (Annali di Matematica, tom. XXVIII, 1919).

Per questo osserviamo che, essendo le $\lambda_{i/r}$ funzioni del posto, risulta

$$(d' d'' - d'' d')\, \psi_i = \sum_1^n {}_r\, \lambda_{i/r}\, (d' d'' - d'' d')\, dx_r .$$

Dunque potremo scrivere

$$u_i + u'_i + u''_i =$$
$$\sum_1^n {}_r\, \lambda_{i/r} \left\{ (d' d'' - d'' d')\, dx_r + (d'' d - d\, d'')\, d' x_r + (d\, d' - d' d)\, d'' x_r \right\} .$$

Alla variabile x_r sono applicate tre caratteristiche di variazioni in ognuno dei sei termini compresi entro la parentesi a graffa. Considerando quei due termini che hanno la stessa caratteristica esterna, si vede, per l'invertibilità delle differenziazioni interne, che essi si annullano, e ciò prova l'asserto. D'altra parte, scambiando ciclicamente gli indici h, k, q in u'_i, u''_i, si ha

$$u_i + u'_i + u''_i = \sum_1^n {}_{hkq}\, \psi_h\, \psi'_k\, \psi''_q \left\{ \gamma_{ih,qk} + \gamma_{ik,hq} + \gamma_{iq,kh} \right\} = 0$$

il cui annullarsi identico, cioè per ogni i e qualunque siano le $\psi_h, \psi'_k, \psi''_q$, riporta appunto alla relazione ciclica (7).

Chimica. — *Nuove sintesi dell'acido cianidrico mediante l'effluvio elettrico*. Nota di Luigi Francesconi e Adolfo Ciurlo, presentata dal Corrisp. N. Parravano.

È notissimo che il Berthelot (1) nel 1869, con la scintilla, riuscì ad unire l'acetilene con l'azoto e formare una notevole quantità di acido cianidrico. In seguito il Berthelot (2) stesso sottoponendo alcuni miscugli gassosi all'azione dell'effluvio elettrico, ne studiò anche l'influenza sopra eguali volumi di acetilene ed azoto. Constatò che i gas si condensavano per dare un composto solido ed amorfo che egli suppose, senza darne le ragioni, una diammina con i varî elementi nel rapporto $C^{18}H^{18}N^2$.

Dopo Berthelot l'azione dell'effluvio elettrico sull'acetilene fu ripreso dal Jovitschitsch (3), dal Losanitsch (4) ed infine dal Kaufmann (5) i quali studiarono l'acetilene solo e unito ad altre sostanze. Il Losanitsch concluse che l'acetilene, da solo, si condensa per dare un composto avente la caratteristica di assorbire energicamente l'ossigeno. Ciò chiariva il fatto non spiegato dal Jovitschitsch il quale nell'analisi dei prodotti di condensazione tro-

(1) Bull., 1869 (XI), pag. 446; Ann., 1869, v. 150, pag. 60.
(2) C. R., t. 126, pag. 567.
(3) Bull., 1908, IV, 1118.
(4) Ber., 40, 4, pag. 4659.
(5) Ann., V, 417, pag. 34.